目　录

引　言

我们知道，“函数”的自变量与函数值都是数或数组。从函数概念拓广出去，便是“变换”的概念。“变换”的自变量与因变量还可以是向量、矩阵或函数。例如线性代数中的线性变换，便是以列向量为自变量及因变量的一种变换。又如微积分学中的求导运算也是一种变换，其自变量与因变量都是一元函数，其定义域便是可导函数类。

所谓**积分变换**，就是通过积分运算，把一个函数变成另一个函数的变换。详言之，就是把某函数类A中任意的函数$f(x)$，乘上一个确定的二元函数$K(x, p)$，然后计算积分，即

$$F(p)=\int_a^b f(x)K(x, p)dx$$

这样，便变成了另一个函数类B中的函数$F(p)$。其中积分域是确定的。$K(x, p)$的形式，决定着变换的不同名称。通常把$K(x, p)$称作**核**；把$f(x)$称作**像原函数**，把$F(p)$称作$f(x)$的**像函数**；在一定条件下，它们是一一对应的，并且变换是可逆的。

用积分变换去解微分方程或其它方程，是基于这样一种想法：假若不容易从原方程中直接求得未知的解x，那么，便去求它的某种变换的像函数X；然后再由求得的X去找x。这种变换的选择，应当使得：①能把x的方程变成x的像函数X的方程。②X的方程是容易求解的。

在初等数学里，也有类似的作法。例如，欲解代数方程$x^3=\sqrt[4]{a}\times b^5/c$，其中$a$、$b$、$c$为已知。先对方程两边取对数，把求未知数$x$的问题，转化为求它的对数$X=\lg x$的问题；求出了$X$，再取反对数，$x$也就得出了。以上运算过程，是离不开对数

表的。

从上例中我们得到的启示是：

1．对特定类型的方程，必须选用适宜的“变换”。上例取对数，便可以用较简单的运算代替相对来说是复杂的运算（具体地说，是用加、减运算代替乘、除，用乘、除代替乘方、开方）。若对上述方程取其他“变换”，例如取正弦，显然是不能成功的。

2．对这种“变换”，应制成备查用的“变换表”，它的作用与对数表的作用相同。

下面分别介绍最常用的积分变换：拉普拉斯变换、傅里叶变换、傅里叶正弦变换、傅里叶余弦变换。先讨论它们的定义与性质，在此基础上制成最简单的变换表。有了这些准备，才有可能讨论应用——解某些微分方程及其它方程。

为便利读者记忆、比较，我们将书中要讲的几种积分变换列表于下：

积分变换名称	像原函数 $f(t)$ 的定义域	积分核	定　义	常用记号	求逆公式
拉普拉斯变换	$(0, +\infty)$	e^{-pt}	$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$	$F(p)$ $\mathscr{L}\{f(t)\}$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}F(p)dp$
傅里叶变换	$(-\infty, +\infty)$	$e^{-i\alpha t}$	$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt$	$F(\alpha)$ $\mathscr{F}\{f(t)\}$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t}F(\alpha)d\alpha$
傅里叶余弦变换	$(0, +\infty)$	$2\cos\alpha t$	$2\int_0^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt$	$F_c(\alpha)$	$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha t d\alpha$
傅里叶正弦变换	$(0, +\infty)$	$2\sin\alpha t$	$2\int_0^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt$	$F_s(\alpha)$	$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha t d\alpha$

第一章　拉普拉斯变换

本章讨论拉普拉斯（Laplace）变换的定义、性质及各方 面的应用。对拉普拉斯变换的定义，采用直接给出的方式，与此同时也给出其逆变换概念而不给出逆变换的积分表达式；我们把其复反演公式放入第二章最后一节。这样安排使得我们有可能尽早讨论最感兴趣的问题——拉普拉斯变换的各种应用，尤其是用它来解常系数线性常微分方程。其他应用，有的还有待于在电学、控制论、数学物理方程等课程中继续深入介绍。

学习本章，要具备微积分学，尤其是其中的含参变量积分、广义积分、Γ函数以及线性常微分方程理论等方面的数学基础知识。

§1.1　拉普拉斯变换概念

（一）拉普拉斯变换的定义

定义　对定义在区间（0，+∞）上的实自变量t的函数$f(t)$，乘以e^{-pt}（其中p为复数），然后对t由0到+∞积分。此广义积分若收敛，便确定了一个复数p的复值函数$F(p)$

$$F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.1.1}$$

这样，上式中的积分给出了函数$f(t)$与另一函数$F(p)$的对应规律，这种对应规律叫做积分变换。这里的变换称**拉普拉斯变换**，用记号$\mathscr{L}\{f(t)\}$表示，即

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{1.1.1$'$}$$

所以（1.1.1）式变成了

$$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}$$

我们称函数$F(p)$为函数$f(t)$的**像函数**；也称$F(p)$为

$f(t)$的**拉普拉斯变换的结果**，简称为$f(t)$的拉普拉斯变换。反之，我们称函数$f(t)$为函数$F(p)$的**像原函数**或**拉普拉斯逆变换**。$F(p)$的拉普拉斯逆变换用记号$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$表示，所以有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$$

根据以上定义，可得出两个重要的恒等式：

$$\mathscr{L}^{-1}\mathscr{L}\{f(t)\}=f(t)$$
$$\mathscr{L}\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=F(p)$$

以上两式都表示了**变换与其逆变换的作用能相互抵消**，这本是意料中的事●。

注意，拉普拉斯变换是复变数$p=s+i\sigma$的复值函数，其中$s=\mathrm{Re}(p)$、$\sigma=\mathrm{Im}(p)$。(1.1.1)式及(1.1.1)′式中的积分，应理解为实自变量t的复值函数

$$f(t)e^{-pt}=f(t)e^{-st}(\cos\sigma t-i\sin\sigma t)$$

沿着t轴的正半轴的积分；也可从实函数的积分去理解它，即看作两个实函数积分的线性组合

$$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\cos\sigma t dt-i\int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}\sin\sigma t dt$$

我们约定，像原函数今后均用小写字母表示，如$f(t)$、$g(t)$等等。它们对应的像函数，则用对应的大写字母表示，如

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p),\quad \mathscr{L}\{g(t)\}=G(p)$$

等等。于是还有

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=f(t),\quad \mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}=g(t)$$

等等。对此，今后不再一一说明。

线性性质

容易证明，**拉普拉斯变换是线性变换**，即对任意两个函数$f_1(t)$、$f_2(t)$及任意常数c_1、c_2，都有

● 这里需给$f(t)$、$F(p)$以某种良好的条件或引入等价函数类的概念。但在应用上不必作如此仔细的追究。

$$\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\} \tag{1.1.2}$$

事实上，

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\{c_1f_1(t)+c_2f_2(t)\}\\&=\int_0^{+\infty}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)]e^{-pt}dt\\&=c_1\int_0^{+\infty}f_1(t)e^{-pt}dt+c_2\int_0^{+\infty}f_2(t)e^{-pt}dt\\&=c_1\mathscr{L}\{f_1(t)\}+c_2\mathscr{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

更一般地，有

$$\mathscr{L}\left\{\sum_k c_kf_k(t)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}\{f_k(t)\} \tag{1.1.3}$$

拉普拉斯逆变换也是线性变换，即有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_k c_kF_k(p)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}^{-1}\{F_k(p)\} \tag{1.1.4}$$

事实上，若设函数 $F_k(p)$ 的逆变换为 $\varphi_k(t)$：$\mathscr{L}^{-1}\{F_k(p)\}=\varphi_k(t)$，则$\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}=F_k(p)$，$(k=1,2,3,\cdots)$。利用拉普拉斯变换的线性性质（1.1.3）式，有

$$\mathscr{L}\left\{\sum_k c_k\varphi_k(t)\right\}=\sum_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}$$

这式子表明：$\sum_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}$ 的像原函数就是 $\sum_k c_k\varphi_k(t)$（由拉普拉斯逆变换的定义），即

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_k c_k\mathscr{L}\{\varphi_k(t)\}\right\}=\sum_k c_k\varphi_k(t)$$

这就是（1.1.4）式，证完。

〔例1〕 求$\mathscr{L}\{t^\alpha\}$，其中$\alpha>-1$。

解 为推导方便计，我们设积分参数$p>0$，则

$$\mathscr{L}\{t^\alpha\}=\int_0^{+\infty}t^\alpha e^{-pt}dt=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\int_0^{+\infty}u^\alpha e^{-u}du$$

$$=\frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)●$$

其中用到变量代换 $pt=u$。

若在上式中令 $\alpha=n=1，2，3,\cdots$，根据 Γ 函数的性质 $\Gamma(n+1)=n!$，便有

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{1}{p^{n+1}}\Gamma(n+1)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

与此对应

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^{n+1}}\right\}=\frac{t^n}{n!}$$

〔例 2〕 求 $\mathscr{L}\{e^{-at}\}$，其中 a 为复常数。

解

$$\mathscr{L}\{e^{-at}\}=\int_0^{+\infty}e^{-at}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-(p+a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{p+a}e^{-(p+a)t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p+a}$$

其中假设 $\mathrm{Re}(p+a)>0$，即 $\mathrm{Re}(p)>-\mathrm{Re}(a)$。

与此对应

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}=e^{-at}$$

〔例 3〕 求 $\mathscr{L}\{\sin\omega t\}$，其中 ω 为实常数。

解 由 $\sin\omega t=(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})/2i$ 及例 2 结果，得

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\mathscr{L}\left\{\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}\right\}$$

$$=\frac{1}{2i}[\mathscr{L}\{e^{i\omega t}\}-\mathscr{L}\{e^{-i\omega t}\}]$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-\omega i}-\frac{1}{p+\omega i}\right]=\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

● 这里所采用的 Γ 函数定义为

$$\Gamma(m)=\int_0^{+\infty}t^{m-1}e^{-t}dt\qquad(m>0)$$

类似可得 $\cos\omega t$、$\operatorname{sh}\omega t$、$\operatorname{ch}\omega t$ 的拉普拉斯变换。当然，这些函数的拉普拉斯变换，也可由直接计算广义积分得到。

下面是常用的最基本的变换表：

序　号	像　原　函　数	像　函　数
0	0	0
1	$u(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$t^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3	$t^\alpha(\alpha>-1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
5	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
6	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

利用这张表以及拉普拉斯变换线性性质，我们可以求得其他变换公式。

〔**例 4**〕　求$\mathscr{L}\{\operatorname{sh}\omega t\}$。

解　因 $\operatorname{sh}\omega t=-i\sin(\omega ti)$，由上表公式 6，得

$$\mathscr{L}\{\operatorname{sh}\omega t\}=-i\mathscr{L}\{\sin(\omega ti)\}$$

$$=-i\frac{\omega i}{p^2+(\omega i)^2}=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$$

这便是本书末附表二中的公式 14。

〔**例 5**〕　已知$Y(p)=\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$，计算$\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}$。

解　求有理分式的像原函数时，首先要把它化为部分分式。令

$$Y(p)=\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$$

$$=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p-3}+\frac{C}{p-2}$$

等式两边同乘 $(p+1)(p-3)(p-2)$，比较p的同次项系数，计算可得

$$A=-\frac{1}{6},\ B=\frac{7}{2},\ C=-\frac{4}{3},\ \text{所以}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/6}{p+1}+\frac{7/2}{p-3}+\frac{-4/3}{p-2}\right\}\\&=-\frac{1}{6}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}+\frac{7}{2}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-3}\right\}\\&\quad-\frac{4}{3}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-2}\right\}\\&=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}-\frac{4}{3}e^{2t}\end{aligned}$$

解完。

（二）单位阶跃函数

定义 单位阶跃函数$u(t)$定义为(图 1-1)

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\0 & t<0\end{cases}$$

由于本章所讨论的函数都是单侧函数，仅定义在正半数轴$(0,+\infty)$上，所以单位阶跃函数也就是在定义域（正半数轴）中恒取单位1为值的函数，它在所有像原函数当中起着“单位”的作用，因此有些教材便把这个函数记作$1(t)$或简写为1。

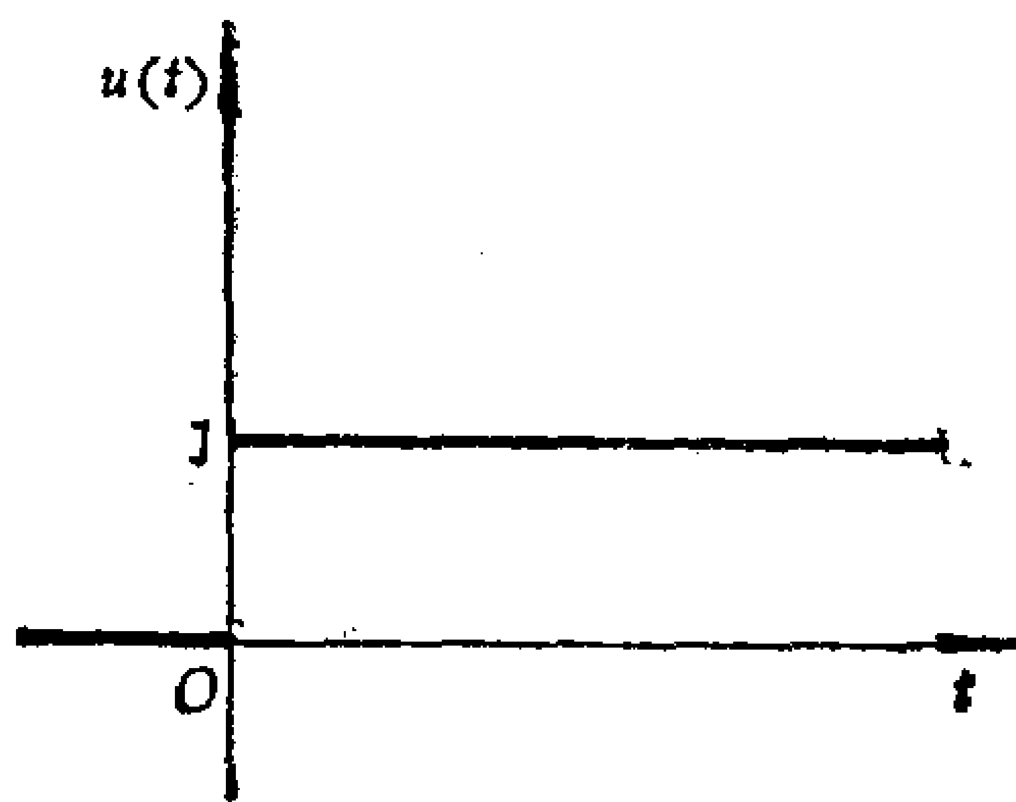


图 1-1

〔例6〕 求$\mathscr{L}\{u(t)\}$。

解

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=\int_0^{+\infty}u(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}e^{-pt}dt$$
$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{p}(\mathrm{Re}\,p>0) \tag{1.1.5}$$

其中用到 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-pt}=0$。这是因为，若令 $p=s+i\sigma$，则 $|e^{-pt}|=e^{-st}|e^{-i\sigma t}|=e^{-st}$，而它显然趋向 0，只要 $s=\mathrm{Re}\,p>0$。

从以上推算还可看出，当 $s=\mathrm{Re}\,p\leqslant 0$ 时，极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-pt}$ 不存在，从而广义积分发散。这表明在复平面的左半平面上（包括作为其边界的纵轴），$u(t)$ 没有拉普拉斯变换。但在应用上，当 $S=\mathrm{Re}\,p\leqslant 0$ 时 $u(t)$ 的拉普拉斯 变换不再用广义积分来定义了，而直接定义为 $1/p$。也 就 是 说，对任意的 p（$p\neq 0$），都有

$$\mathscr{L}\{u(t)\}=\frac{1}{p}\qquad(p\neq 0)$$

而不再附注条件“$\mathrm{Re}\,p>0$”。实质上，这用到了**解析延拓**概念：把像函数从其定义域（即广义积分的收敛域）上延拓到整个复数 p 平面，仅 $p=0$ 除外。关于这个问题的详细说明可查阅复变函数论方面的书，这里不再深入解释。

需要指出，在实用上，往往对其它的函数 $f(t)$ 也是这样处理的，即只要 $f(t)$ 在复平面的一个子域中存在拉普拉斯变换，则经过解析延拓之后，便认为 $f(t)$ 在整个复 p 平面有拉普拉斯变换，仅像函数 $F(p)$ 的奇点除外。

〔例 7〕 求 $\mathscr{L}\{u(t-a)\}$，其中常数 $a\geqslant 0$。

解 由定义知

$$u(t-a)=\begin{cases}1 & t>a\\ 0 & t<a\end{cases}$$

（图 1-2），所以计算积分得

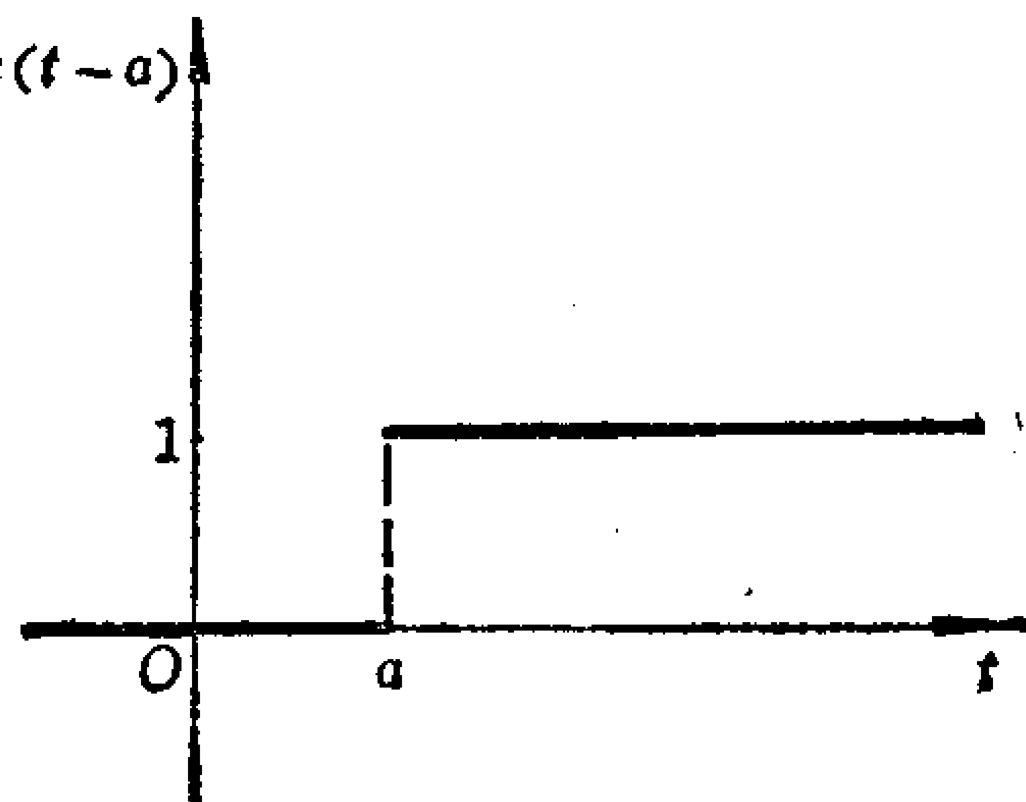


图 1-2

$$\mathscr{L}\{u(t-a)\}=\int_0^{+\infty}u(t-a)e^{-pt}dt=\int_a^{+\infty}e^{-pt}dt$$

$$=-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{t=a}^{t=+\infty}=\frac{e^{-ap}}{p}\quad(\mathrm{Re}\,p>0)$$

即

$$\mathscr{L}\{u(t-a)\}=\frac{e^{-ap}}{p},\ (a\geqslant 0)\qquad(1.1.6)$$

解完。

利用单位阶跃函数，可以表示许多不连续函数及不连续信号。例如已知曲线 $x=f(t)$ 如图 1-3 所示，我们可以求出由它所派生出来的间断曲线（图 1-4，图 1-5，图 1-6，图 1-7）的函数表示式。

容易知道：图 1-4 中的间断曲线可用单侧函数 $x=f(t)\cdot u(t)$ 表示；图 1-5 中的间断曲线可用函数 $x=f(t)u(t-\tau)$ 表示。图 1-6 中的曲线，可看作由 t 轴上、下的两条用虚线

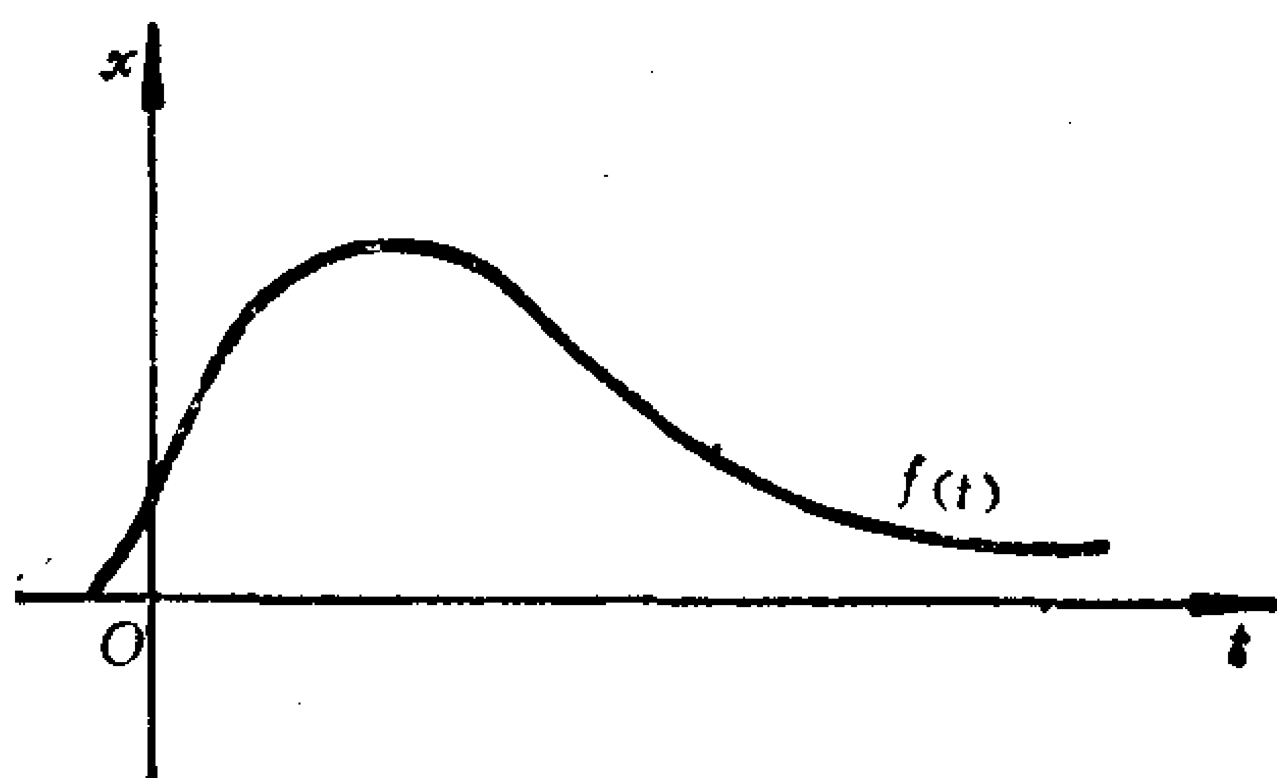


图 1-3

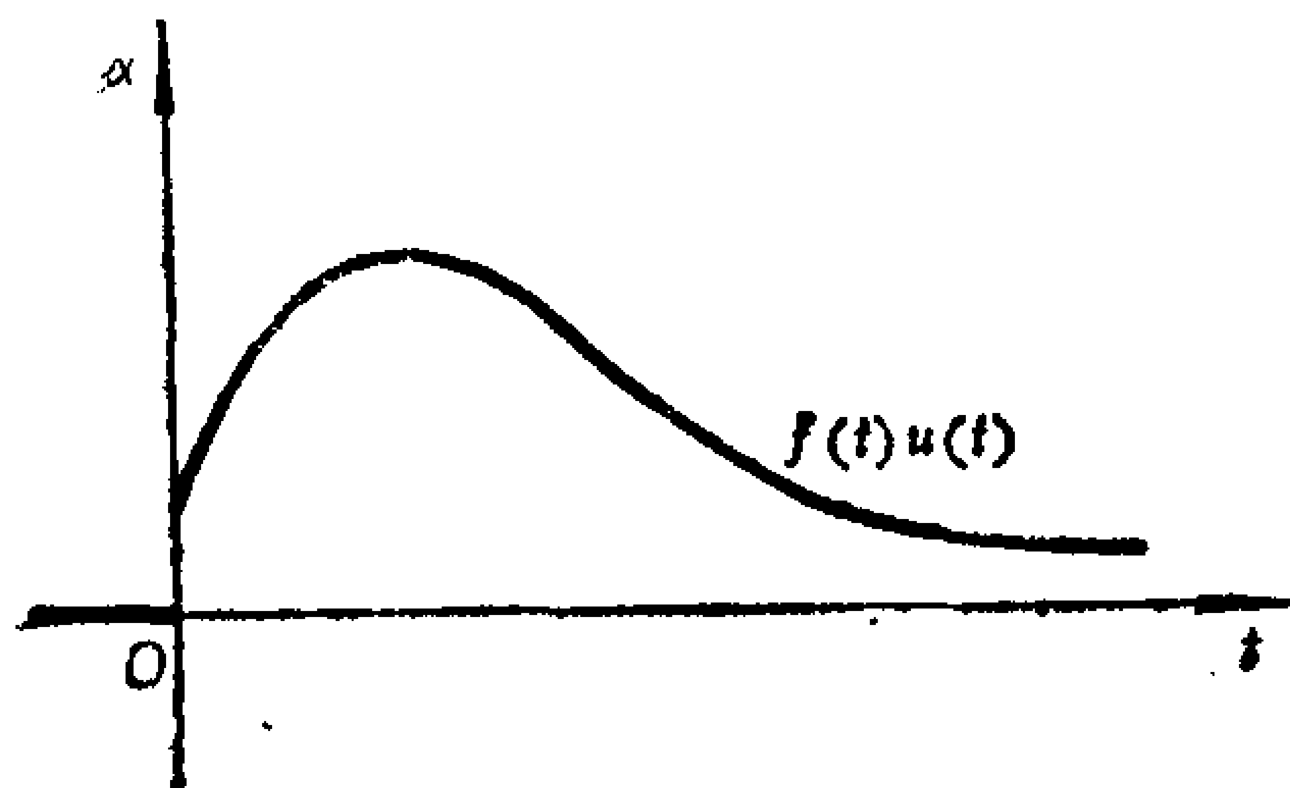


图 1-4

$x=f(t)u(t)$

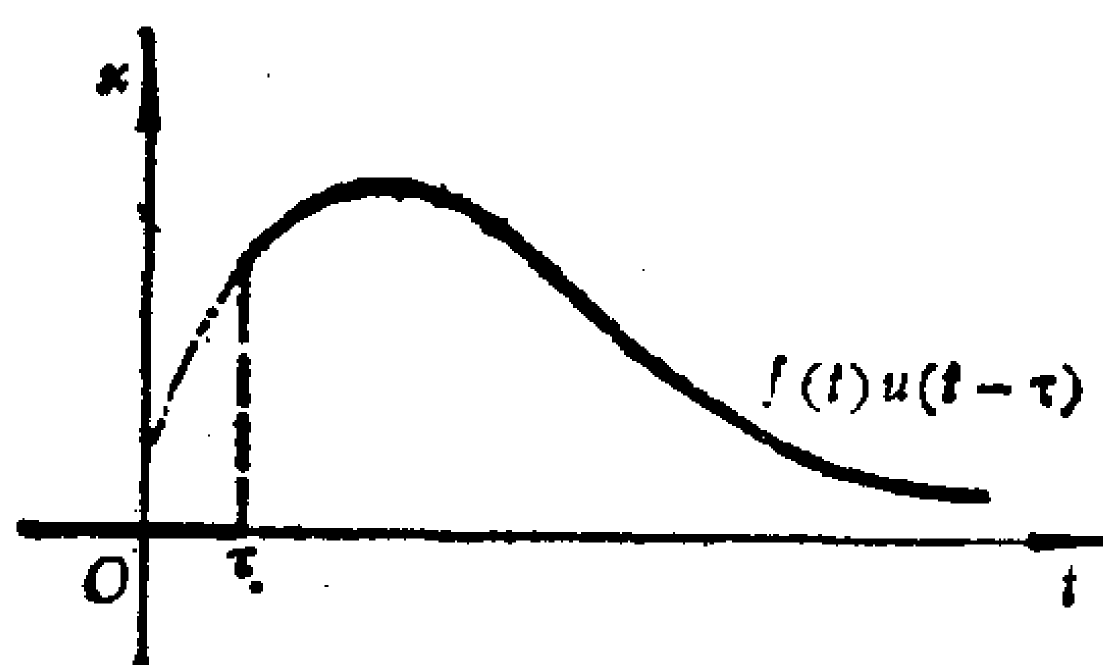


图 1-5

$x=f(t)u(t-\tau)$

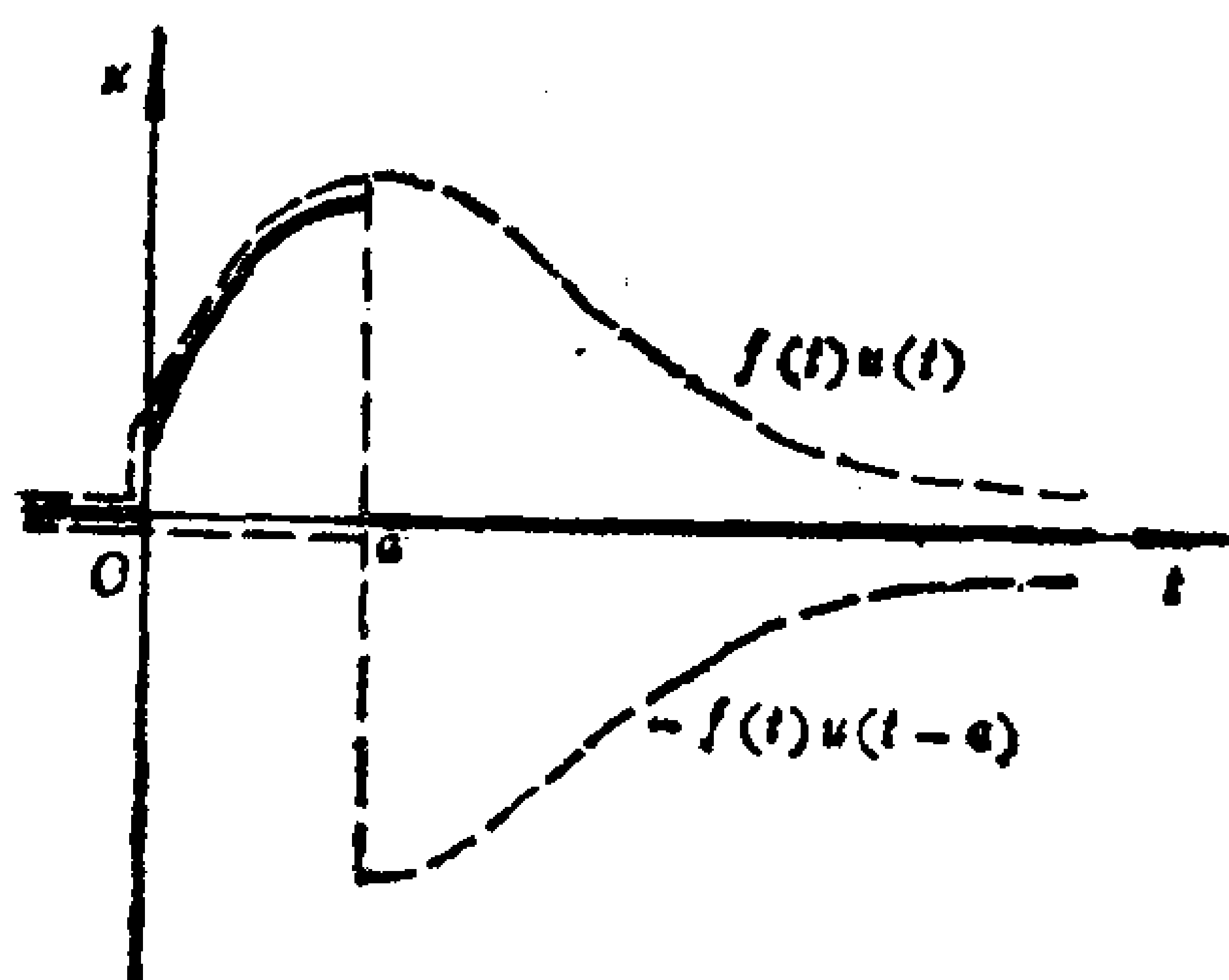


图 1-6

$x=f(t)[u(t)-u(t-a)]$

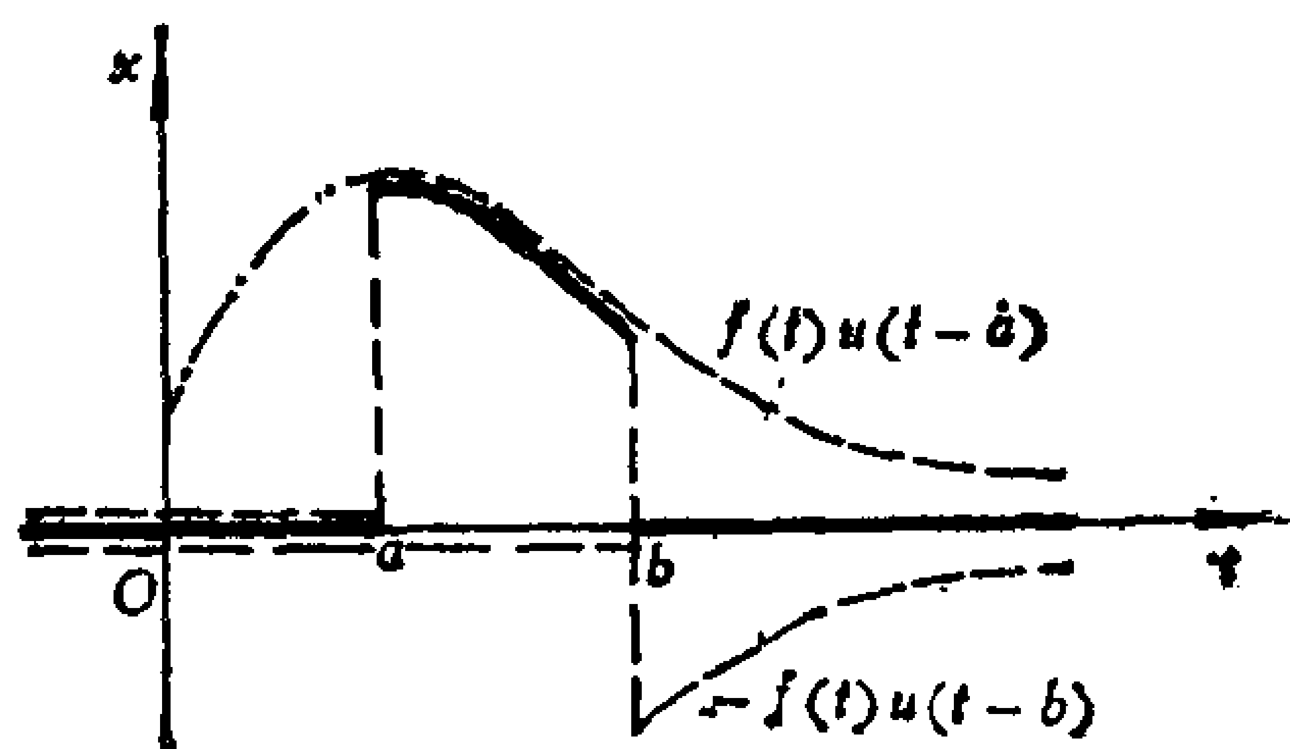


图 1-7

$x=f(t)[u(t-a)-u(t-b)]$

所表示的曲线叠加而成的，所以其函数表示式为

$$x(t)=f(t)u(t)+[-f(t)u(t-a)]$$
$$=f(t)[u(t)-u(t-a)]$$

图 1-7 中的曲线，可看作是由 t 轴上面的间断曲线 $x=f(t)\cdot u(t-a)$ 与 t 轴之下的间断曲线 $x=-f(t)u(t-b)$ 叠加而成的，所以其函数表示式为

$$x(t)=f(t)u(t-a)+[-f(t)u(t-b)]$$
$$=f(t)[u(t-a)-u(t-b)]$$

利用单位阶跃函数还可以把图 1-8 中粗线所表示的脉动函数表示为

$$x=K[u(t-\tau_1)-u(t-\tau_2)]$$

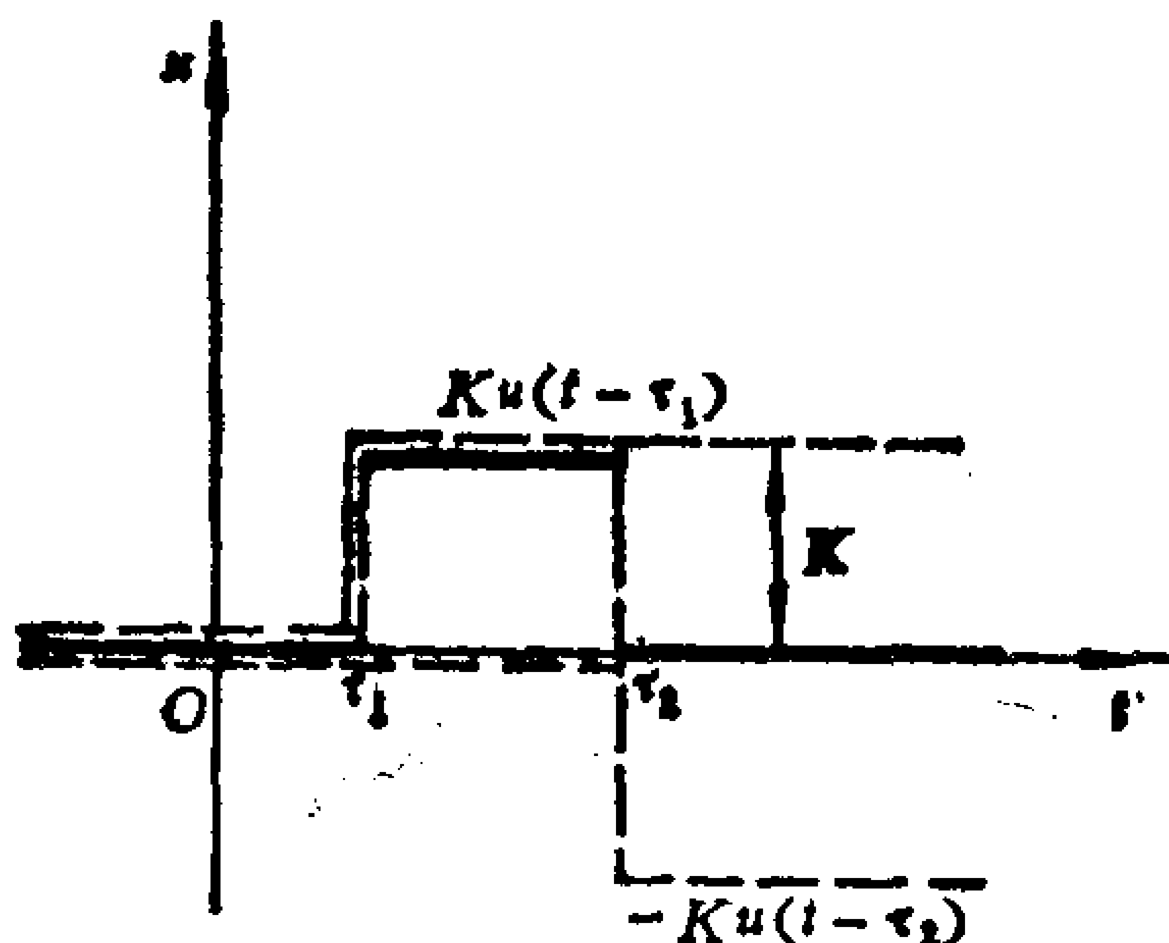


图 1-8

$x=K\{u(t-\tau_1)-u(t-\tau_2)\}$

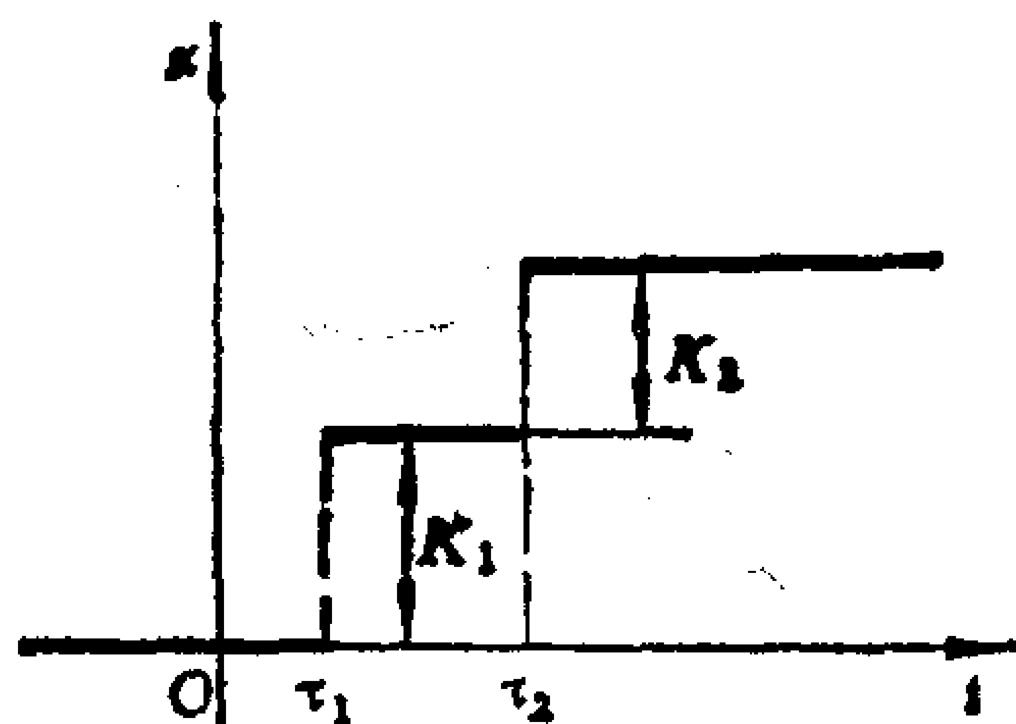


图 1-9

$x=K_1u(t-\tau_1)+K_2u(t-\tau_2)$

把图 1-9 中粗线所示的**双阶跃函数**表示为

$$x=K_1u(t-\tau_1)+K_2u(t-\tau_2)$$

其中K，K_1，K_2均为常数，都表示**跃度**，可正可负。与此相仿，不难得出三阶跃函数、四阶跃函数……的表示式来。

〔**例 8**〕 求函数

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 8, & 0<t<2\\ 6, & t>2\end{cases}$$

（图1-10）的拉普拉斯变换。

解 把图中曲线看作由曲线$8u(t)$与$-2u(t-2)$迭加而成

$$f(t)=8u(t)-2u(t-2)$$

由公式（1.1.5）和（1.1.6），得

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=8\mathscr{L}\{u(t)\}-2\mathscr{L}\{u(t-2)\}$$

$$=\frac{2}{p}(4-e^{-2p})$$

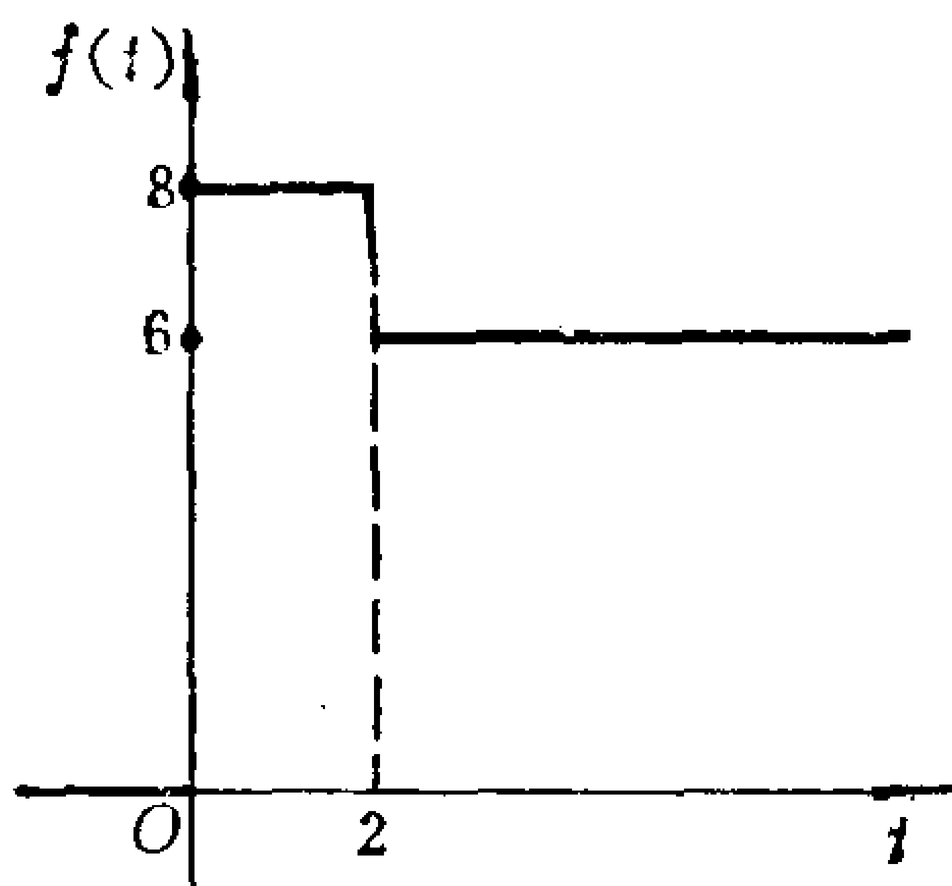


图 1-10

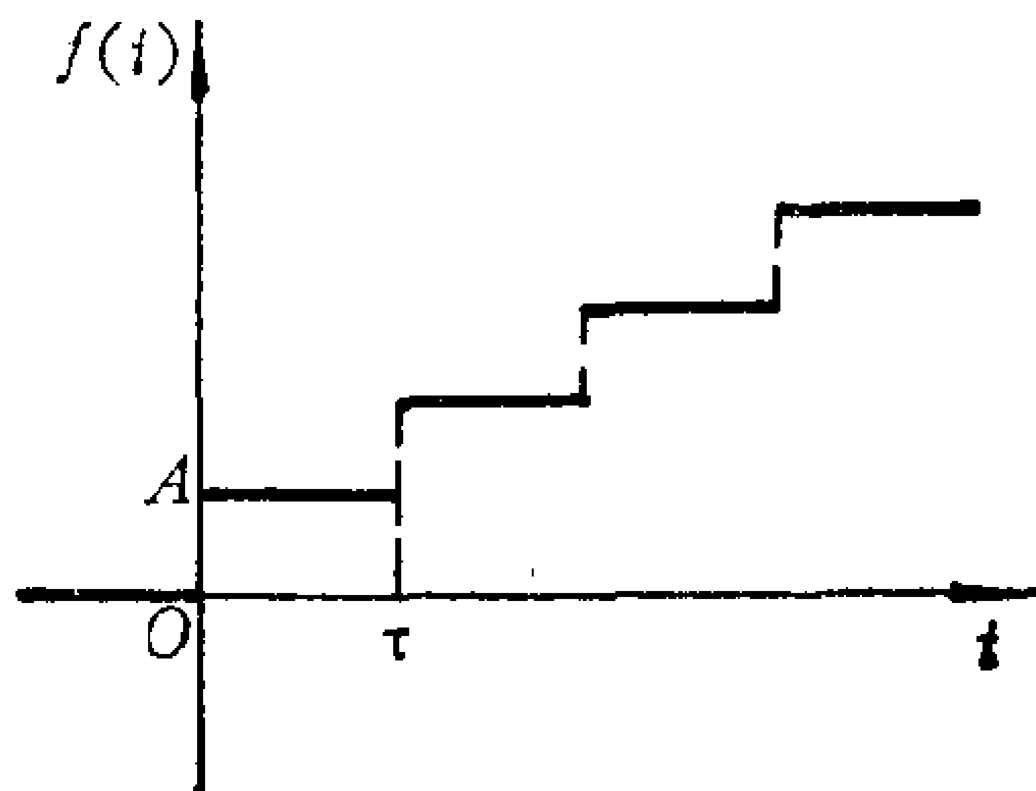


图 1-11

〔**例9**〕 求图1-11所示的阶梯函数的拉普拉斯变换。

解 由于每一个跃度都是A，该曲线可看作由曲线$Au(t)$，$Au(t-\tau)$，$Au(t-2\tau)$，……等等迭加而成，于是

$$f(t)=A[u(t)+u(t-\tau)+u(t-2\tau)+\cdots]$$

其中A为跃度，τ为阶距。由公式（1.1.3）和（1.1.6）得

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=A\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-\tau p}+\frac{1}{p}e^{-2\tau p}+\cdots\right]$$

因为 $s=\mathrm{Re}\,p>0$ 时，$|e^{-\tau p}|=e^{-\tau s}<1$，上式右边的几何级数收敛，所以

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{A}{p}\cdot\frac{1}{1-e^{-p\tau}}=\frac{A}{2p}\cdot\frac{(1-e^{-p\tau})+(1+e^{-p\tau})}{1-e^{-p\tau}}$$

$$=\frac{A}{2p}\left(1+\frac{1+e^{-p\tau}}{1-e^{-p\tau}}\right)$$

$$=\frac{A}{2p}\left(1+\frac{e^{p\tau/2}+e^{-p\tau/2}}{e^{p\tau/2}-e^{-p\tau/2}}\right)=\frac{A}{2p}\left(1+\mathrm{cth}\frac{p\tau}{2}\right)$$

〔**例10**〕 求图1-12所示以2τ为周期的矩形冲击函数的拉普拉斯变换。

解 由于跃度依序为A，$-2A$，$2A$，$-2A,\cdots$，参考图1-9所示的双阶跃函数的表达式，可知矩形冲击周期函数的表示式为

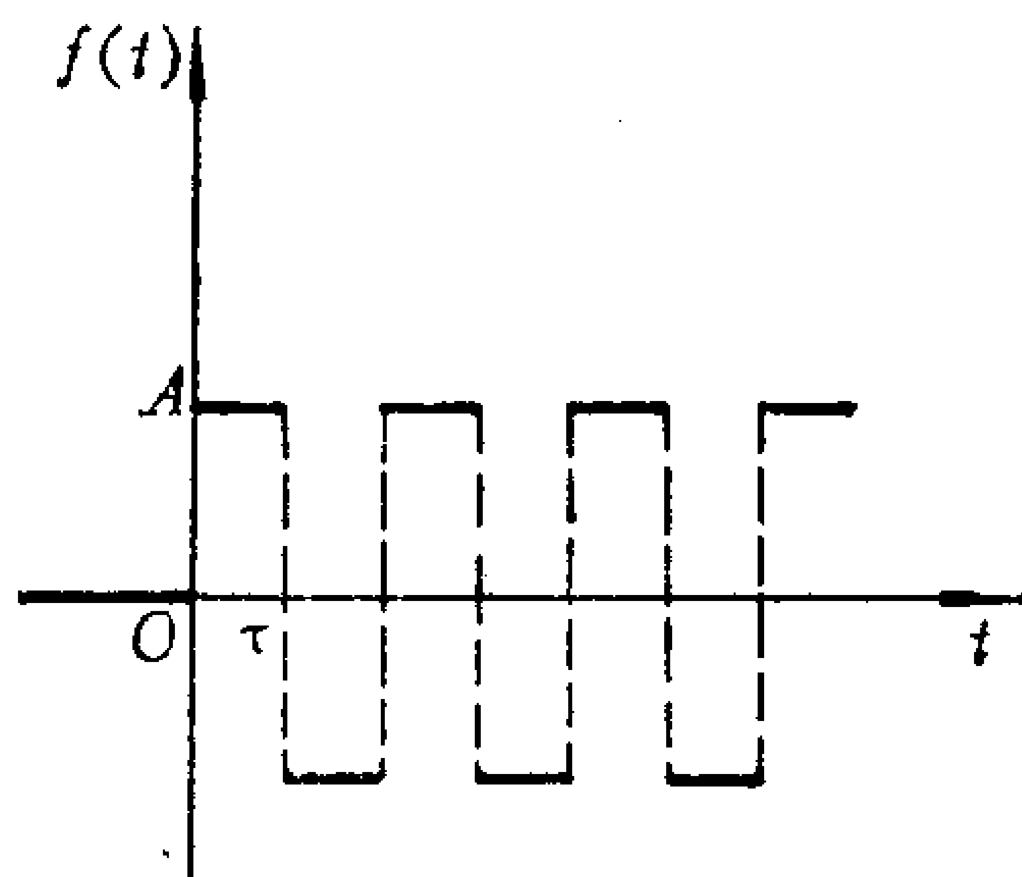


图 1-12

$$f(t)=A[u(t)-2u(t-\tau)+2u(t-2\tau)-2u(t-3\tau)+\cdots]$$

所以由公式（1.1.3）和（1.1.6）得

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=A\left[\frac{1}{p}-2\frac{e^{-p\tau}}{p}+2\frac{e^{-2p\tau}}{p}-2\frac{e^{-3p\tau}}{p}+\cdots\right]$$

$$=\frac{A}{p}\left(1-2\frac{e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}\right)=\frac{A}{p}\cdot\frac{1-e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}$$

$$=\frac{A}{p}\cdot\frac{e^{p\tau/2}-e^{-p\tau/2}}{e^{p\tau/2}+e^{-p\tau/2}}=\frac{A}{p}\mathrm{th}\frac{p\tau}{2}$$

*（三）拉普拉斯变换的存在问题

哪些类函数存在拉普拉斯变换？假若某函数有拉普拉斯变换，那么像函数的存在域是什么形式的？下面定理1.1回答第一个问题，定理1.2回答第二个问题。

定理1.1 设函数$f(t)$满足下列条件

1．当$t<0$时，$f(t)=0$。

2. $f(t)$ 在每一个有限区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上满足狄义赫里条件（更广泛地，可以假设函数在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 是逐段连续的，即 $f(t)$ 仅有有限个间断点，而且间断点是第一类的）。

3. 随着 t 的增大，函数 $f(t)$ 的绝对值的增大，不比某个指数函数快。确切地说，存在常数 $M>0$ 和 s_0 使得

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t} \tag{1.1.7}$$

则由式（2.1.1）确定的 $f(t)$ 的像函数 $F(p)$ 在半平面 $\mathrm{Re}\,p > s_0$ 存在，且是解析的。

证明 实际上，当 $\mathrm{Re}\,p = s > s_0$ 时，由不等式(1.1.7)可知

$$|F(p)| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt\right| \leqslant \int_0^{+\infty} Me^{-(s-s_0)t}dt$$
$$= \frac{M}{s-s_0} \tag{1.1.8}$$

所以积分（1.1.1）收敛（还是绝对收敛的），即 $F(p)$ 存在。$F(p)$ 的解析性这里不去证明，关心这个问题的读者请参考有关的复变函数论教材。证完。

容易知道定理1.1 的条件仅是充分的，而不是必要的；若不满足上述条件，拉普拉斯变换仍可能存在。例如，由 § 1.1例1可知，$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\}$ 是存在的，但 $t^{-1/2}$ 显然在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 不是逐段连续的（这是因为它的间断点 $t=0$ 不是第一类的）。

关于定理中条件 1 的说明 从物理应用的观点来看，条件 1 往往能满足。例如，当 $f(t)$ 表示一质点作直线运动时的位移函数，假如我们选定运动开始的时刻为 $t=0$，显然在此时刻之前质点静止着，所以位移 $f(t)\equiv 0\ (t<0)$。又如我们用 $f(t)$ 表示变化的外力，把它加到一个运动着的物体上去；假设加外力的时刻为 $t=0$，显然在此时刻之前物体所受的外力恒为 0，即 $f(t)\equiv 0\ (t<0)$。

我们在拉普拉斯变换中所讨论的函数，都是满足条件 1 的单侧函数。为此我们约定，以后若写：$f(t)$，应理解为：$f(t)\cdot u(t)$。例如若提及函数 $\sin t$，不是指图 1-13(a) 中曲线 $y=$

$\sin t$，而是指（b）中曲线 $y=u(t)\sin t$。这一点，往往被初学者忽略，希读者注意。

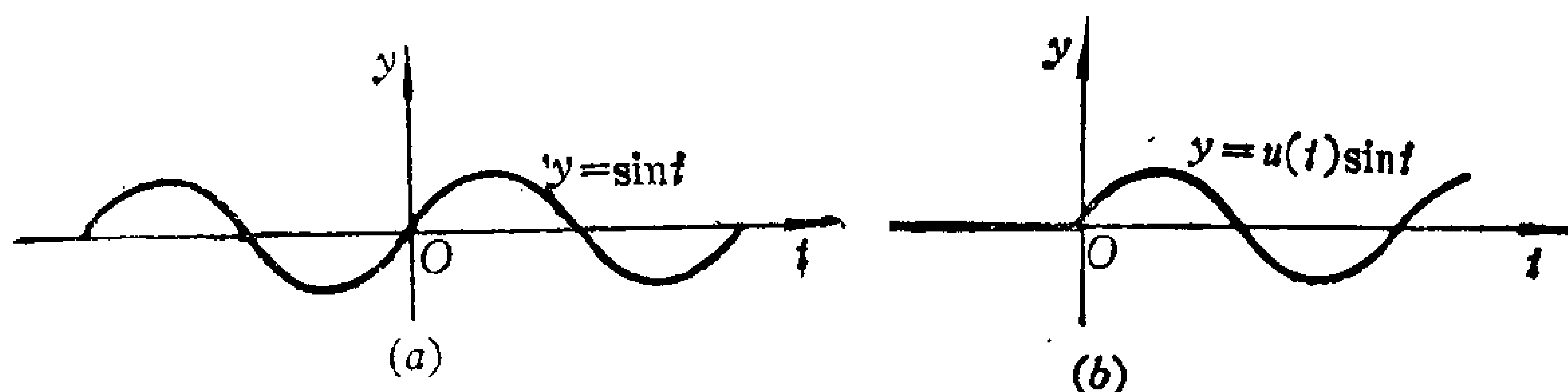


图 1-13

关于定理中条件 3 的说明 凡满足条件 3 的函数，称之谓指数阶的函数。常见函数大都是指数阶的。如：$|u(t)|\leqslant 1\cdot e^{0t}$，这里$M=1$，$S_0=0$，所以 $u(t)$ 是指数阶的。$|e^{\alpha t}|\leqslant 1\cdot e^{\alpha t}$，这里$M=1$，$S_0=\alpha$，所以 $e^{\alpha t}$ 是指数阶的。利用求导数证明不等式的方法可以证明$|t^n|\leqslant n!e^t(n=1,2,\cdots)$，这里$M=n!$，$S_0=1$，所以函数 t^n 也是指数阶的。而函数 e^{t^2} 不满足条件 3，因不论选M及 S_0 多么大，可用罗必塔法则证明，对足够大的 t，总会出现 $e^{t^2}>Me^{S_0 t}$，因此 e^{t^2} 不是指数阶函数。

定理1.2 设函数 $f(t)$满足定理1.1 的条件 2（更广泛地，可以假设函数 $f(t)$ 在任何一个有限区间$[0,T]$内是可积分的），则定义拉普拉斯变换的积分式（1.1.1）若在 p_0 点收敛，那么它在所有满足条件 $\mathrm{Re}(p-p_0)>0$ 的点 p 处都收敛。

证明 设$\varphi(t)=\int_0^t f(u)e^{-p_0 u}du$，则有 $\varphi'(t)=f(t)\cdot e^{-p_0 t}$。因$\varphi(t)$ 在$0<t<+\infty$可导，所以也在$0<t<+\infty$连续。又由于$\varphi(0^+)=0$，而极限

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\int_0^{+\infty}f(u)e^{-p_0 u}du=F(p_0)$$

存在，所以$\varphi(t)$ 在$0<t<+\infty$内有界，存在着一正数N，使

$$|\varphi(t)|\leqslant N<+\infty \quad (0<t<+\infty)$$

下面我们考虑积分

$$\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=\int_0^T e^{-(p-p_0)t}d\varphi(t)$$
$$=e^{-(p-p_0)T}\varphi(T)$$
$$+(p-p_0)\int_0^T \varphi(t)e^{-(p-p_0)t}dt \tag{1.1.9}$$

当 $\mathrm{Re}(p-p_0)>0$ 时，上式右端第一项显然随 $T\to+\infty$ 而趋向于 0；而由估计第二项，得到

$$\left|(p-p_0)\int_0^T \varphi(t)e^{-(p-p_0)t}dt\right|$$
$$\leqslant|p-p_0|N\int_0^T|e^{-(p-p_0)t}|dt$$
$$=|p-p_0|N\times\frac{1}{\mathrm{Re}(p-p_0)}[1-e^{-\mathrm{Re}(p-p_0)T}]$$
$$<\frac{N|p-p_0|}{\mathrm{Re}(p-p_0)}$$

所以当 $T\to+\infty$ 时，这一项是收敛的（因为其中的广义积分是绝对收敛的），从而广义积分

$$\lim_{T\to+\infty}\int_0^T f(t)e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

收敛。定理证完。

于是，对广义积分（1.1.1）而言，便有了三种可能的情形：

1．积分到处发散，不存在像函数 $F(p)$。

2．积分到处收敛。

3．存在这样的实数 s_c，使得当 $\mathrm{Re}(p)>s_c$ 时，积分收敛；而当 $\mathrm{Re}(p)<s_c$ 时，积分发散。

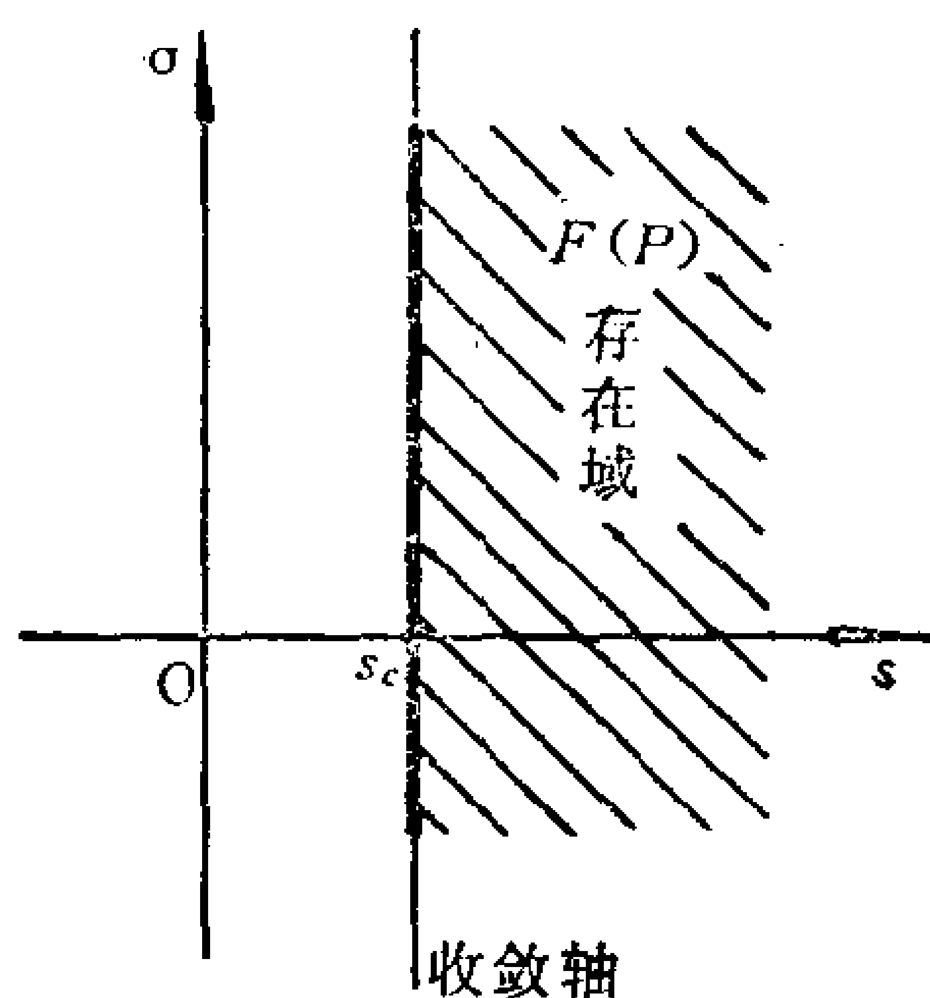


图 1-14

在复平面上，直线 $\mathrm{Re}(p)=s_c$ 叫做积分（1.1.1）的收敛轴，而 s_c 叫做积分（1.1.1）的**收敛坐标**（图1-14）。定理1.2 告诉我

们，像函数存在域往往是一个半平面。对上述情形 1，我们可认为收敛坐标 $s_c=+\infty$；对情形 2，我们则可以认为收敛坐标 $s_c=-\infty$。

若函数 $f(t)$ 满足定理1.1 条件 3，显然，$s_c \leqslant s_0$。

§1.2　拉普拉斯变换的性质

以下都假设所涉及到的拉普拉斯变换存在，并且像原函数都满足定理 1.1 的条件。利用本节性质、线性性质以及 §1.1 中的最基本的变换表，可以计算较复杂的函数的像函数，或者计算较复杂的像函数的像原函数。本节所列诸性质当中，在应用上最为重要的是性质(二)。

(一) 相似性

定理　设 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，$b>0$，则

$$\mathscr{L}\{f(bt)\}=\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right) \tag{1.2.1}$$

证明　由定义及积分变量代换 $bt=x$，可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(bt)\}&=\int_0^{+\infty} f(bt)e^{-pt}dt\\&=\frac{1}{b}\int_0^{+\infty} f(x)e^{-\frac{p}{b}x}dx\\&=\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)\end{aligned}$$

证完。

(二) 导数的像函数

定理　函数 $f(t)$ 的导数的像函数，都可用 $f(t)$ 的初始值和像函数表示，即有

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(0^+) \tag{1.2.2}$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+) \tag{1.2.3}$$

一般地，对任意的正整数 n，有

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=p^nF(p)-p^{n-1}f(0^+)-p^{n-2}f'(0^+)-\cdots$$
$$-pf^{(n-2)}(0^+)-f^{(n-1)}(0^+) \qquad (1.2.4)$$

其中 $f^{(k)}(0^+)=\lim\limits_{t\to 0^+}f^{(k)}(t)$，$k=0，1，2，\cdots，n-1$。

证明 为使证明 (1.2.2)式过程简便，我们设 $f'(t)$在$(0，+\infty)$内连续。由分部积分法得

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty}f'(t)e^{-pt}dt=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}f'(t)e^{-pt}dt$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^{+\infty}e^{-pt}df(t)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[f(t)e^{-pt}\Big|_{t=\varepsilon}^{t=+\infty}+p\int_\varepsilon^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt\right]$$

$$=pF(p)-f(0^+)$$

其中当 $\mathrm{Re}p=s>s_0$ 时，因为 $|f(t)e^{-pt}|\leqslant Me^{-(s-s_0)t}$，所以 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}=0$。

若两次利用 (1.2.2) 式，得

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=\mathscr{L}\{[f'(t)]'\}=p\mathscr{L}\{f'(t)\}-f'(0^+)$$
$$=p\{pF(p)-f(0^+)\}-f'(0^+)$$
$$=p^2F(p)-pf(0^+)-f'(0^+)$$

这便是 (1.2.3) 式。若进一步设 $f(t)$、$f'(t)$、…、$f^{(n-1)}(t)$ 都满足定理1.1 的条件，利用数学归纳法可以证明公式(1.2.4)。

特别，当 $f(t)$ 以及所涉及到的 $f(t)$ 的各阶导数在点 $t=0$ 都连续时，则由 (1.2.2)、(1.2.3)、(1.2.4) 式，有

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=pF(p)-f(0) \qquad (1.2.5)$$

$$\mathscr{L}\{f''(t)\}=p^2F(p)-pf(0)-f'(0) \qquad (1.2.6)$$

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=p^nF(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-1-k}f^{(k)}(0) \qquad (1.2.7)$$

再若有全零初始条件 $f^{(k)}(0)=0$（$k=0，1，2，\cdots，n-$

1)，则上式成为

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}=p^nF(p) \tag{1.2.8}$$

〔例1〕 利用拉普拉斯变换求解一阶微分方程

$$y'=y$$

解 设解为 $y=y(t)$，代入上方程后变成一恒等式

$$y'(t)\equiv y(t)$$

两边同取拉普拉斯变换，由公式（1.2.5）得到

$$p\mathscr{L}\{y(t)\}-y(0)=\mathscr{L}\{y(t)\}$$

解出 $\mathscr{L}\{y(t)\}$，得

$$\mathscr{L}\{y(t)\}=\frac{y(0)}{p-1}$$

再对上式等号两边取逆拉普拉斯变换，并利用§1.1(一）中最基本的变换表里的公式4，便得到

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{y(0)}{p-1}\right\}=y(0)\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\}=y(0)e^t$$

解完。

〔例2〕 利用导数的像函数公式求 $\mathscr{L}\{\sin\omega t\}$。

解 因

$$(\sin\omega t)''=-\omega^2\sin\omega t$$

等式两边同取拉普拉斯变换，注意 $f(0)=\sin\omega t|_{t=0}=0$，$f'(0)=(\sin\omega t)'_{t=0}=\omega\cos\omega t|_{t=0}=\omega$，由公式（1.2.6），得到

$$p^2\mathscr{L}\{\sin\omega t\}-\omega=-\omega^2\sin\omega t$$

于是得到：$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\omega/p^2+\omega^2$，与§1.1(一）中例3结果同。

（三）像函数的导数

定理 若 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，则

$$F'(p)=-\mathscr{L}\{tf(t)\} \tag{1.2.9}$$

一般地，有

$$F^{(n)}(p)=(-1)^n\mathscr{L}\{t^nf(t)\} \tag{1.2.10}$$

证明 由定义并由积分号下求导，得

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}]dt$$
$$=-\int_0^{+\infty}tf(t)e^{-pt}dt=-\mathscr{L}\{tf(t)\}$$

其中可以在积分号下求导，是因为最后一个积分式在任一个半平面 $\text{Re}p\geqslant a$（$a>s_0$，其中 s_0 为定理1.1 中函数 $f(t)$ 所应满足的条件 3：$|f(t)|\leqslant Me^{s_0t}$ 中的指数系数）上，对 p 来说是一致收敛的●。

下面我们补充证明积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial p}[f(t)e^{-pt}]dt=-\int_0^{+\infty}tf(t)e^{-pt}dt \tag{1.2.11}$$

是一致收敛的。估计被积函数

$$|tf(t)e^{-pt}|\leqslant|t|Me^{s_0t}e^{-\text{Re}\,pt}=Mte^{-(\text{Re}\,p-s_0)t}<Mte^{-(a-s_0)t}\quad(a>s_0)$$

由实算可知，不含参变量的广义积分 $\int_0^{+\infty}Mte^{-(a-s_0)t}dt$ 收敛，按一致收敛判别法知，积分（1.2.11）一致收敛。证完。

〔例3〕 已知 $\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$，$\mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$（见§1.1 中最基本的变换表），求 $\mathscr{L}\{t\sin\omega t\}$ 及 $\mathscr{L}\{t\cos\omega t\}$。

解 由公式（1.2.9）得

$$\mathscr{L}\{t\sin\omega t\}=-\frac{d}{dp}\cdot\mathscr{L}\{\sin\omega t\}$$
$$=-\frac{d}{dp}\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)=\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

● **定理** 若 $f(x,y)$ 与 $\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ 连续，$\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛且 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$ 一致收敛，则有

$$\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty}f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx$$

即可以积分号下求导。关于这个定理，可参考《高等数学教程》二卷二分册，斯米尔诺夫著，孙念增译，第 237页。

$$\mathscr{L}\{t\cos\omega t\}=-\frac{d}{dp}\mathscr{L}\{\cos\omega t\}$$

$$=-\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+\omega^2}\right)=\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$$

（四）积分的像函数

定理 若$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，则

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{F(p)}{p} \tag{1.2.12}$$

即

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{p}\right\}=\int_0^t f(u)du \tag{1.2.13}$$

证明 设$\int_0^t f(u)\,du=g(t)$，则$g'(t)=f(t)$，$g(0)=0$。由式（1.2.5）得

$$\mathscr{L}\{g'(t)\}=p\mathscr{L}\{g(t)\}-g(0)$$

即

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=p\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}$$

所以

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\}=\frac{\mathscr{L}\{f(t)\}}{p}=\frac{F(p)}{p}$$

证完。

推论

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t \frac{(t-u)^n}{n!}f(u)du\right\}=\frac{1}{p^{n+1}}F(p)$$

$$(n=0,1,2,\cdots) \tag{1.2.14}$$

事实上，若令$\frac{1}{p}F(p)=F_1(p)$，由（1.2.13）知，其逆像为$f_1(t)=\int_0^t f(u)du$。所以再对$F_1(p)$利用（1.2.13）式，并交换累次积分次序（图1-15），便有

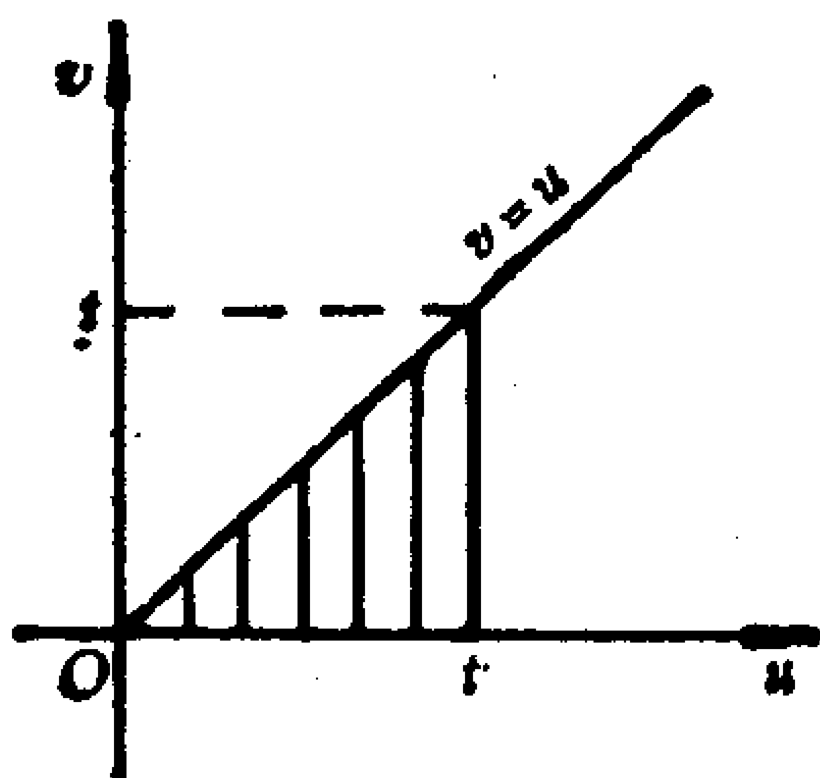


图 1-15

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}F(p)\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}F_1(p)\right\}$$

$$=\int_0^t f_1(t)dt=\int_0^t f_1(u)du$$

$$=\int_0^t du\int_0^u f(v)dv$$

$$=\int_0^t f(v)dv\int_v^t du$$

$$=\int_0^t (t-v)f(v)dv$$

即

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^t (t-v)f(v)dv\right\}=\frac{1}{p^2}F(p)$$

这便是推论（1.2.14）式 $n=1$ 时的形式。再利用数学归纳法便可对任意的 n 证得（1.2.14）式。

〔例4〕 求 $\mathscr{L}\{1-\cos\omega t\}$。

解 因 $1-\cos\omega t=\omega\int_0^t \sin\omega u du$，由式（1.2.12）可得

$$\mathscr{L}\{1-\cos\omega t\}=\omega\mathscr{L}\left\{\int_0^t \sin\omega u du\right\}$$

$$=\frac{\omega}{p}\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}$$

这与利用线性性质计算所得结果相同，即

$$\mathscr{L}\{1-\cos\omega t\}=\mathscr{L}\{1\}-\mathscr{L}\{\cos\omega t\}$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+\omega^2}=\frac{\omega^2}{p(p^2+\omega^2)}$$

（五）像函数的积分

定理 若$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，则

$$\int_p^{\infty}F(p)dp=\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} \tag{1.2.15}$$

证明 为使证明简化，我们选积分路径在p平面的正实轴上(图1-16 中自u轴上的p点向右的无限长直线)。由定义及交换积分顺序，得

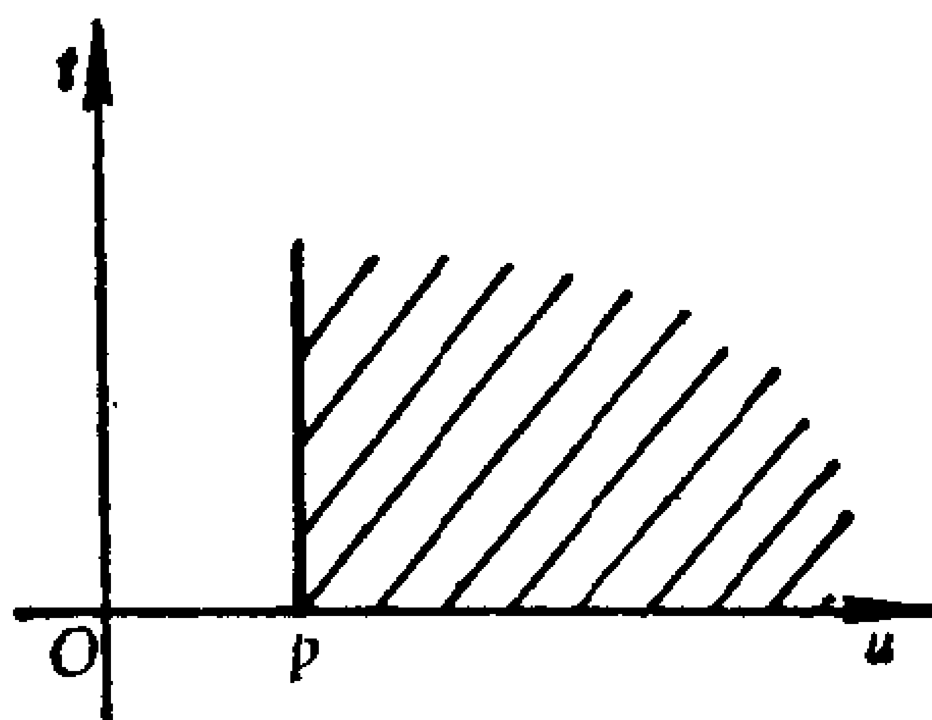


图 1-16

$$\begin{aligned}\int_p^{\infty}F(p)dp &=\int_p^{+\infty}F(u)du=\int_p^{+\infty}du\int_0^{+\infty}f(t)e^{-ut}dt\\ &=\int_0^{+\infty}f(t)dt\int_p^{+\infty}e^{-ut}du\\ &=\int_0^{+\infty}f(t)dt\left(-\frac{e^{-ut}}{t}\right)_{u=p}^{u=+\infty}\\ &=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-pt}dt=\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\end{aligned}$$

证完。

推论

$$\underbrace{\int_p^{\infty}dp\int_p^{\infty}dp\cdots\int_p^{\infty}}_{m\text{次积分}}F(p)dp=\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t^m}\right\} \tag{1.2.16}$$

〔例5〕 求$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}$。

解 因$\mathscr{L}\{\sin t\}=\frac{1}{1+p^2}$，由式（1.2.15）可得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-pt}dt=\int_p^{\infty}\frac{1}{1+p^2}dp$$

$$=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}\,p=\text{arcctg}\,p$$

在上式中若令 $p=0$，可得我们熟知的积分公式

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

（六）时间迟缓定理

定理　对于任意的正数 τ，都有

$$\mathscr{L}\{f(t-\tau)u(t-\tau)\}=e^{-p\tau}F(p) \qquad (1.2.17)$$

其中函数 $f(t-\tau)u(t-\tau)$ 的图形如图1-17(b)所示，它是图1-17(a)中的曲线 $f(t)u(t)$ 向右平移 τ 的结果。当 t 解释为时间时，$f(t-\tau)u(t-\tau)$ 表示作用 $f(t)u(t)$ 推迟了时间 τ。

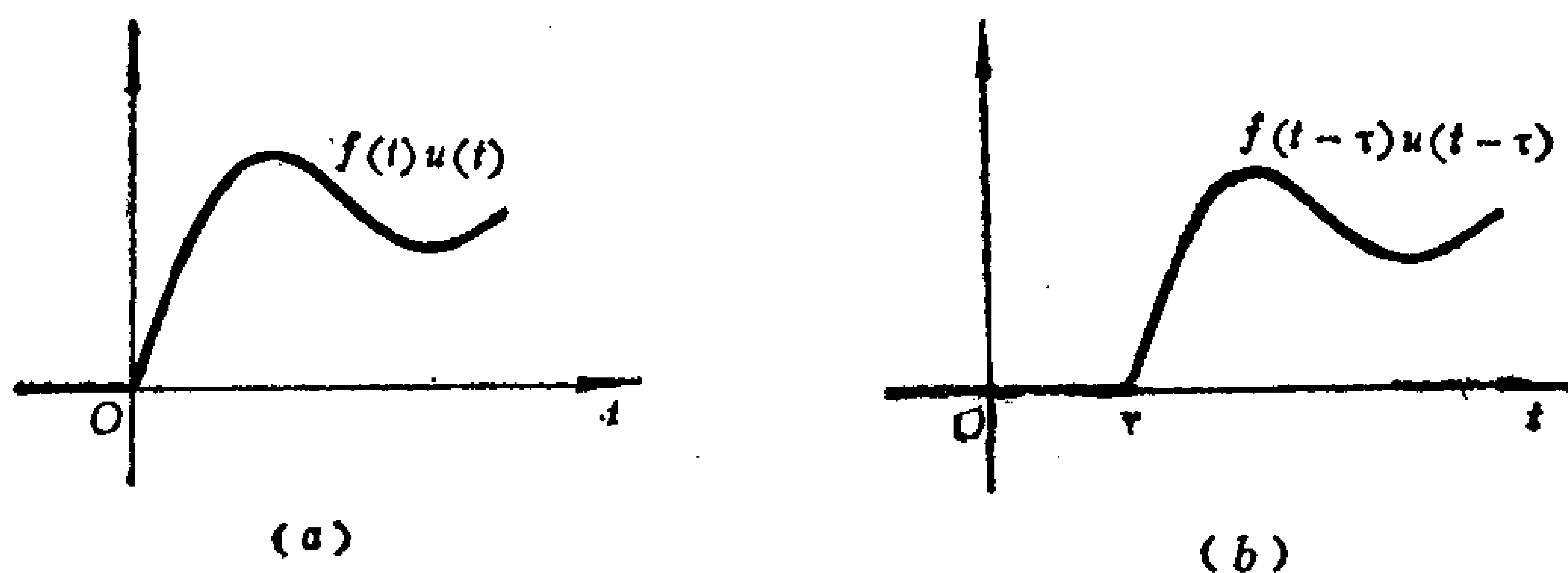


图　1-17

证明　由定义及积分变量代换 $t-\tau=t_1$ 得

$$\mathscr{L}\{f(t-\tau)u(t-\tau)\}=\int_{\tau}^{+\infty}f(t-\tau)e^{-pt}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}f(t_1)e^{-p(t_1+\tau)}dt_1$$

$$=e^{-p\tau}F(p)$$

证完。

本定理另一形式是：若 $\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=f(t)$，则有

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-p\tau}F(p)\}=f(t-\tau)u(t-\tau) \qquad (1.2.17)'$$

〔例6〕 设

$$f(t)=\begin{cases} t & t>\pi \\ \sin t & t<\pi \end{cases}$$

(图1-18(a)), 求$\mathscr{L}\{f(t)\}$。

解 将$f(t)$看作图1-18(b)与图1-18(c)中曲线的迭

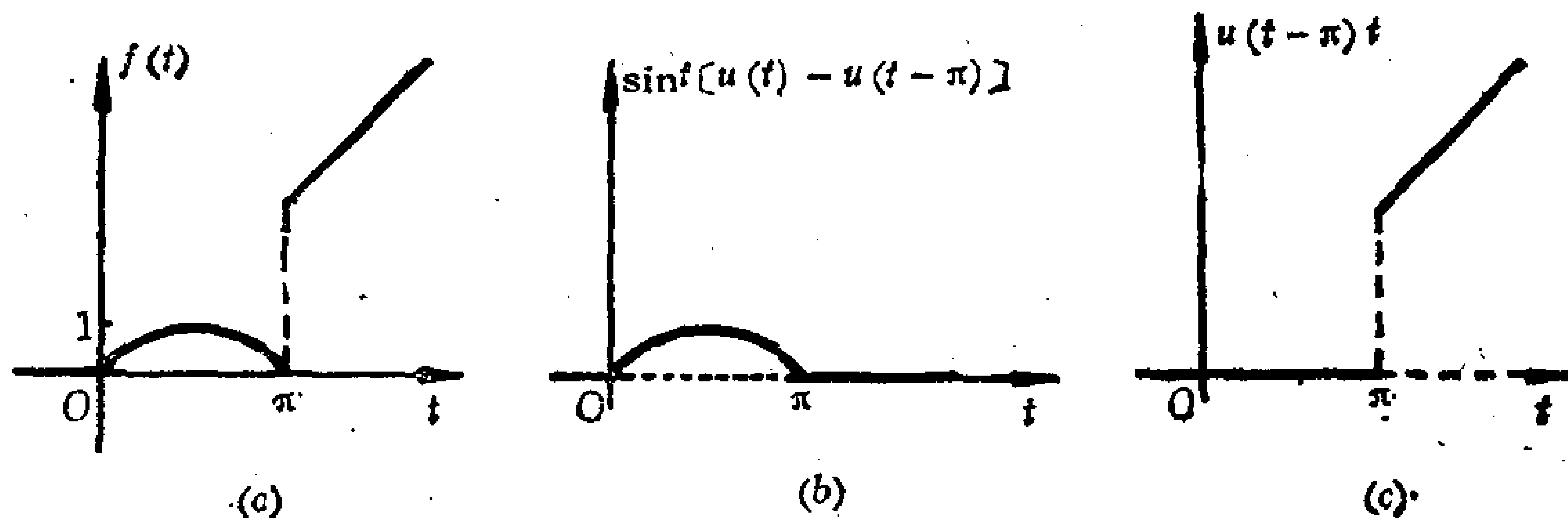


图 1-18

加, 可得

$$\begin{aligned} f(t)&=\sin t\,[u(t)-u(t-\pi)] \\ &\quad+t\,[u(t-\pi)] \\ &=\sin t+(t-\sin t)\,u(t-\pi) \\ &=\sin t+[\pi+(t-\pi) \\ &\quad+\sin(t-\pi)]\,u(t-\pi) \end{aligned}$$

利用线性性质及时间迟缓定理（公式1.2.17), 有

$$\begin{aligned} \mathscr{L}\{f(t)\}&=\mathscr{L}\{\sin t\}+\mathscr{L}\{[\pi+(t-\pi) \\ &\quad+\sin(t-\pi)]\,u(t-\pi)\} \\ &=\frac{1}{p^2+1}+e^{-p\pi}\mathscr{L}\{[\pi+t+\sin t]\,u(t)\} \\ &=\frac{1}{p^2+1}+e^{-p\pi}\left(\frac{\pi}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^2+1}\right) \end{aligned}$$

若按定义直接计算, 所得结果相同。

〔例7〕 求$\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+16}\right\}$。

解 因$\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+16}\right\}=\cos 4t=u(t)\cos 4t$

所以

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{pe^{-2p}}{p^2+16}\right\}=u(t-2)\cos 4(t-2)$$

$$=\begin{cases}0, & t<2\\ \cos 4(t-2), & t>2\end{cases}$$

〔例8〕 已知

$$F(p)=\frac{1}{(p+a)(1-e^{-Tp})}$$

求 $f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。

解 由级数展开

$$\frac{1}{1-e^{-Tp}}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-kTp}$$

知

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-kTp}}{p+a}$$

又由公式 (1.2.17)′得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-kTp}}{p+a}\right\}=e^{-a(t-kT)}\cdot u(t-kT)$$

于是

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\sum_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-kTp}}{p+a}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-a(t-kT)}\cdot u(t-kT)$$

下面我们简化这个结果。显然，当$nT<t<(n+1)T$时

$$u(t-kT)=\begin{cases}1, & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

所以$nT<t<(n+1)T$时

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n} e^{-a(t-kT)}=e^{-at}\sum_{k=0}^{n} e^{akT}$$

$$=e^{-at}\cdot\frac{(e^{aT})^{n+1}-1}{e^{aT}-1}=\frac{e^{-a[t-(n+1)T]}}{e^{aT}-1}-\frac{e^{-at}}{e^{aT}-1}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

解完。

为分析所得结果，令 $\tau=\tau(t)=t-(n+1)T$，则

$$f(t)=\frac{e^{-a\tau(t)}}{e^{aT}-1}-\frac{e^{-at}}{e^{aT}-1} \qquad (1.2.18)$$

考查上式等号右端第一项。易知其中 $\tau=\tau(t)$ 是周期为 T 的锯齿波，斜率为 1，在间断点 $t=T$、$2T$、$3T$、……处的跃度均为 $-T$。由此可知 (1.2.18) 式第一项也是以 T 为周期的函数 (图1-19(b))，其第一周期为 $e^{-a(t-T)}/e^{aT}-1$，$(0<t<T)$；且该第一项在 $t=kT(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 各点均有跃度

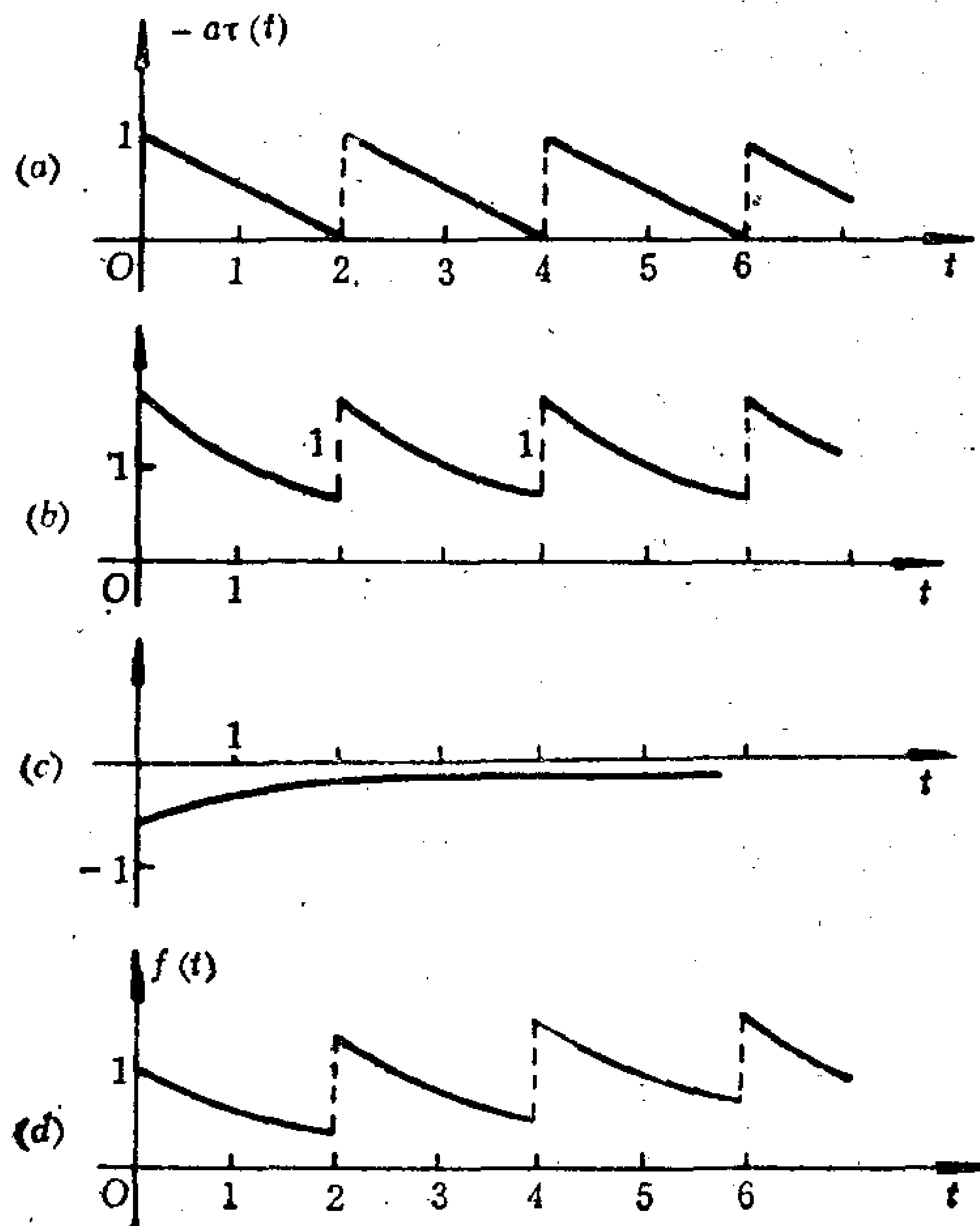


图 1-19

$$\frac{e^{-a\tau(kT+0)}}{e^{aT}-1}-\frac{e^{-a\tau(kT-0)}}{e^{aT}-1}=\frac{e^{aT}}{e^{aT}-1}-\frac{1}{e^{aT}-1}=1$$

图1-19中（a）、（b）、（c）、（d）分别给出了函数

$$-a\tau(t),\ \frac{e^{-a\tau(t)}}{e^{aT}-1},\ -\frac{e^{-at}}{e^{aT}-1},\ f(t)$$

的图形，其中取 $a=1/2$，$T=2$。解 $f(t)$的图形是（b）与（c）中曲线叠加而成。

顺便指出，若已知的像函数$F(p)$具有形式

$$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}\cdot\frac{1}{1\pm e^{-Tp}}$$

(其中$A(p)/B(p)$为有理分式，T为常数)，那么均可用本例提供的方法求出像原函数$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。在人民教育出版社出版的《高等工程数学》(上册)第380页上，与在人民铁道出版社出版的《高等工程数学》(上册)第416页上，都备有这类像函数的求逆公式12个，读者在实际工作中也可直接查用。

（七）复数位移定理

定理 若$\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，p_0是复常数，则

$$F(p-p_0)=\mathscr{L}\{e^{p_0t}f(t)\} \tag{1.2.19}$$

证明 由定义

$$\begin{aligned}F(p-p_0)&=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-(p-p_0)t}dt\\&=\int_0^{+\infty}[f(t)e^{p_0t}]e^{-pt}dt\\&=\mathscr{L}\{e^{p_0t}f(t)\}\end{aligned}$$

证完。

〔**例9**〕 求$\mathscr{L}\{e^{-at}\sin\omega t\}$，$\mathscr{L}\{e^{-at}\cos\omega t\}$，$\mathscr{L}\{e^{-at}t^n\}$

解 利用复数位移定理〔公式（1.2.19)〕与公式

$$\mathscr{L}\{\sin\omega t\}=\frac{\omega}{p^2+\omega^2},\quad \mathscr{L}\{\cos\omega t\}=\frac{p}{p^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\{t^n\}=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

可得

$$\mathscr{L}\{e^{-\alpha t}\sin\omega t\}=\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\{e^{-\alpha t}\cos\omega t\}=\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$$

$$\mathscr{L}\{e^{-\alpha t}t^n\}=\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$$

（八）周期函数的像函数

定理 若$f(t)$是周期为T的函数，则

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}\quad(\mathrm{Re}\,p>0)\qquad(1.2.20)$$

证明 由定义

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt+\int_T^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

在第二个积分中作变量代换$t_1=t-T$，而其被积函数中的因子$f(t)=f(t_1+T)=f(t_1)$，从而

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t)\}&=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt+\int_0^{+\infty}f(t_1)e^{-p(t_1+T)}dt_1\\&=\int_0^T f(t)e^{-pt}dt+e^{-pT}\mathscr{L}\{f(t)\}\end{aligned}$$

求解得

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{\int_0^T f(t)e^{-pt}dt}{1-e^{-pT}}$$

证完。

〔例10〕 求§1.1中图1-12所示的以2τ为周期的矩形冲击函数的拉普拉斯变换。

解 因

$$f(t)=\begin{cases}A, & 2n\tau<t<(2n+1)\tau\\ -A, & (2n+1)\tau<t<(2n+2)\tau\end{cases}\qquad n=0,1,2,\cdots\cdots$$

周期$T=2\tau$，代入式（1.2.20）得

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{A}{1-e^{-2p\tau}}\left[\int_0^{\tau}e^{-pt}dt-\int_{\tau}^{2\tau}e^{-pt}dt\right]$$

$$=\frac{A}{1-e^{-2p\tau}}\times\frac{(1-e^{-p\tau})^2}{p}$$

$$=\frac{A}{p}\times\frac{1-e^{-p\tau}}{1+e^{-p\tau}}=\frac{A}{p}\text{th}\frac{p\tau}{2}$$

这结果与§1.1例10相同。

§1.3 解线性常微分方程

本节我们通过举例来说明怎样利用拉普拉斯变换来解线性常微分方程（组）的特解与通解。

（一） 解常系数线性常微分方程

〔例1〕 求微分方程

$$x''+4x=0,\quad t>0$$

满足初始条件：$x(0)=-2$，$x'(0)=4$ 的特解。

解 在原方程等号两边同乘e^{-pt}，然后对t由0到$+\infty$进行积分，即对方程等号两边取拉普拉斯变换。设$\mathscr{L}\{x(t)\}=X(p)$，由公式(1.1.2) 及 (1.2.6) 得

$$[p^2X(p)-px(0)-x'(0)]+4X(p)=0$$

即

$$[p^2X(p)+2p-4]+4X(p)=0$$

解得$X(p)$

$$X(p)=\frac{-2p+4}{p^2+4}=\frac{-2p}{p^2+4}+\frac{4}{p^2+4}$$

取逆变换，由公式 (1.1.4)，得

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(p)\}=-2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\}$$

$$+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p^2+4}\right\}=-2\cos 2t+2\sin 2t$$

解完。

假若把本题初始条件改为：$x(0)=x_0$，$x'(0)=x_1$，则同

样可求出方程的特解为

$$x(t)=x_0\cos 2t+\frac{x_1}{2}\sin 2t$$

由于其中 x_0、x_1 是任意常数并且彼此是独立的，所以这个解实际上便是微分方程的通解。

为了深入了解这种解法的实质，我们将它与在引言中提到的代数方程的取对数求解方法作比较如下：

问题	解微分方程： $x''+4x=0, x(0)=2, x'(0)=4$	解代数方程： $x^3=\sqrt[4]{a}\times b^5/c$（$a, b, c$ 已知）
设	设 $\mathscr{L}\{x(t)\}=X(p)$，简记为 X	设 $\ln x=X$
变换方程为代数方程	对原方程取拉氏变换，得 $[p^2X+2p-4]+4X=0$	对原方程取对数，得 $3X=\frac{1}{4}\ln a+5\ln b-\ln c$
求像 X	$X=\frac{-2p+4}{p^2+4}$	$X=\frac{1}{12}\ln a+\frac{5}{3}\ln b-\frac{1}{3}\ln c$ （令右端为常数 d）
求逆得解	$x=\mathscr{L}^{-1}\{X\}=-2\cos 2t+2\sin 2t$ （可以借助于拉普拉斯变换表）	$x=e^d$ （可以借助于对数表）

〔例2〕 求非齐次方程

$$y''-2y'-3y=4e^{2t},\quad t>0$$

满足初始条件：$y(0)=2$，$y'(0)=8$ 的特解。

解 对方程两边取拉普拉斯变换，并设 $\mathscr{L}\{y(t)\}=Y(p)$，得

$$[p^2Y(p)-2p-8]-2[pY(p)-2]-3Y(p)=\frac{4}{p-2}$$

解出 $Y(p)$

$$Y(p)=\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$$

取逆变换，利用§1.1例5计算结果，得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}-\frac{4}{3}e^{2t}$$

〔例3〕 解微分方程

$$mx''+kx=u(t)$$

其中 $u(t)$ 是单位阶跃函数。

解 对方程两边取拉普拉斯变换，得

$$m[p^2X(p)-px(0)-x'(0)]+kX(p)=\frac{1}{p}$$

解出

$$X(p)=\frac{1}{p(mp^2+k)}+\frac{mpx(0)+mx'(0)}{mp^2+k}$$

取逆变换得

$$\begin{aligned}x(t)&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p(mp^2+k)}\right\}\\&\quad+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{mpx(0)+mx'(0)}{mp^2+k}\right\}\\&=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{kp}-\frac{1}{k}\cdot\frac{mp}{mp^2+k}\right\}\\&\quad+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{mpx(0)+mx'(0)}{mp^2+k}\right\}\\&=\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)\\&\quad+\left[x(0)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right.\\&\quad\left.+x'(0)\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right]\end{aligned}$$

解完。

我们分析求得的解，其中第一部分(圆括号内的部分)是方程在全零初始条件 $x(0)=x'(0)=0$ 下的特解；解的第二部分(方括号内的部分）是对应的齐次方程的通解，也就是原方程通解中的补函数（在这里，把 $x(0)$，$x'(0)$ 当作任意常数)。以上求出的实际上是已知非齐方程的通解；若代入具体的初始条件，它便

是对应的特解。由此可知，这种解法特别适用于直接求特解。

〔例 4〕 作用于梁上的横向载荷会引起梁的弯曲。梁的纵轴弯曲后形成的曲线，在材料力学中称为该梁的挠度曲线。由材料力学知，梁的挠度曲线 $y=y(x)$ 满足 4 阶微分方程

$$EJy^{(4)}=-q(x) \tag{1.3.1}$$

其中 E 为材料的弹性模量，J 为梁横截面的惯性矩，q 为作用在梁上的载荷密度。对于如图 1-20 所示的简支梁（梁长 $2l$），两端的位移及弯矩应为零，因而挠度曲线还应满足边界条件

$$y(0)=y''(0)=y(2l)=y''(2l)=0 \tag{1.3.2}$$

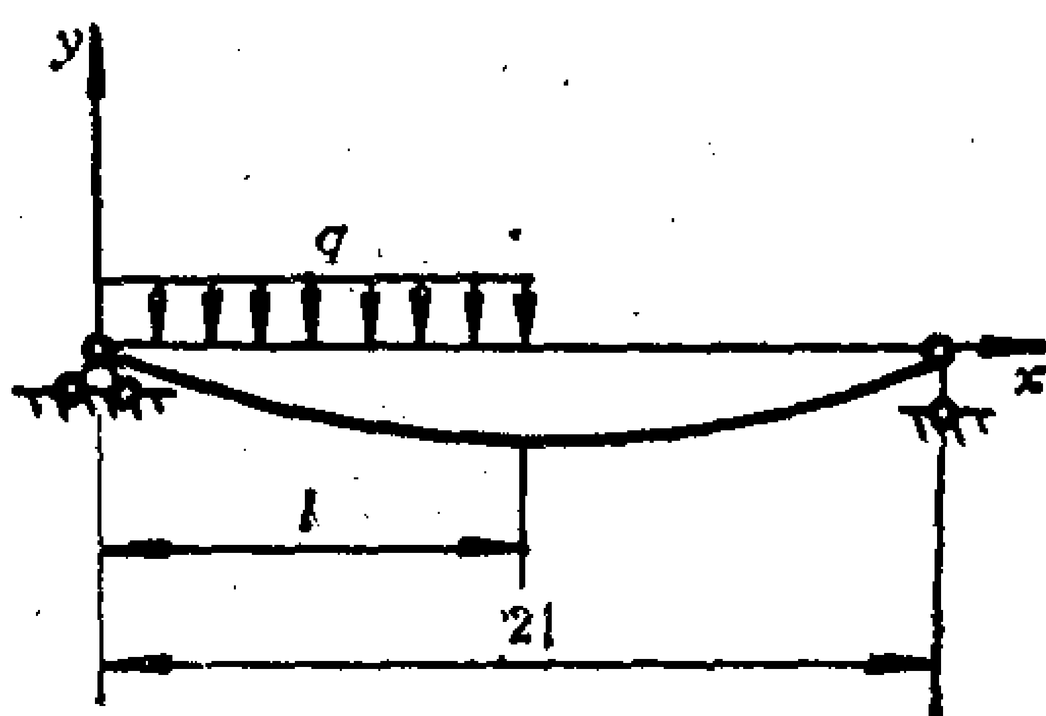


图 1-20

我们再假设图 1-20 中的简支梁的左半部受一强度为 q 的均布载荷，求该梁的挠度曲线方程。

解 由条件知整个梁上所受的载荷密度为 $-q[u(x)-u(x-l)]$，所以挠度曲线 $y=y(x)$ 应满足方程

$$EJy^{(4)}=-q[u(x)-u(x-l)]$$

取拉普拉斯变换，并利用边界条件(1.3.2)中的一部分：$y(0)=y''(0)=0$，得

$$EJ[p^4Y(p)-y'(0)p^2-y'''(0)]=-\frac{q}{p}(1-e^{-lp})$$

解出 $Y(p)$ 得

$$Y(p)=-\frac{q}{EJ}\cdot\frac{1}{p^5}(1-e^{-lp})+\frac{y'(0)}{p^2}+\frac{y'''(0)}{p^4}$$

再取逆变换得

$$y(x)=-\frac{q}{EJ}\left[\frac{x^4}{4!}-\frac{(x-l)^4}{4!}u(x-l)\right]+y'(0)x+\frac{1}{3!}y'''(0)x^3$$

利用边界条件（1.3.2）中的另一部分：$y(2l)=y''(2l)=0$ 代入上式及上式的二阶导数式，便得出 $y'(0)$ 与 $y''(0)$ 的二元线性代数方程组，解代数方程组得出

$$y'(0)=-\frac{3}{16}\cdot\frac{ql^3}{EJ},\quad y''(0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{ql}{EJ}$$

从而解为

$$\begin{aligned}y(x)&=-\frac{q}{EJ}\left[\frac{x^4}{4!}-\frac{(x-l)^4}{4!}u(x-l)\right]\\&\quad-\frac{3}{16}\cdot\frac{ql^3}{EJ}x+\frac{1}{8}\cdot\frac{ql}{EJ}x^3\\&=\begin{cases}-\dfrac{qx}{48EJ}(2x^3-6lx^2+9l^3), & (0\leqslant x\leqslant l)\\[2mm]-\dfrac{ql}{48EJ}(2x^3-12lx^2+17l^2x-2l^3), & (l< x\leqslant 2l)\end{cases}\end{aligned}$$

解完。

*（二）解变系数线性常微分方程举例

有时，拉普拉斯变换可以用来解某些变系数线性微分方程

$$a_0(t)x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=f(t)$$

作为例子，我们讨论

〔例 5〕 求二阶方程

$$tx''+(1-n)x'+x=0\qquad t>0,\quad n\geqslant 0$$

满足初始条件 $x(0)=x'(0)=0$ 的解。

解 由像函数的导数公式（1.2.9）及导数的像函数公式（1.2.6），知

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{tx''\}&=-\frac{d}{dp}\mathscr{L}\{x''\}\\&=-\frac{d}{dp}[p^2X(p)-px(0)-x'(0)]\\&=-2pX(p)-p^2X'(p)+x(0)\end{aligned}$$

所以，对所给的微分方程取变换后，得

$$p^2X'(p)+[(1+n)p-1]X(p)=0$$

解这个可分离变量的一阶微分方程，得到

$$X(p)=\frac{c}{p^{n+1}}e^{-1/p}$$

查变换表（附表二公式 34），得

$$x(t)=ct^{n/2}J_n(2\sqrt{t})$$

其中 J_n 是 n 阶第一类贝塞尔函数●。解中含任意常数 c，是因为 $t=0$ 点是原微分方程的奇点，在这点上 x'' 项的系数为 0，所以在奇点处破坏了解的唯一性。

（三）解常微分方程组举例

用拉普拉斯变换还可解常系数线性微分方程组。这时，解的像函数不再是由代数方程式而是由线性代数方程组解出。举例如下。

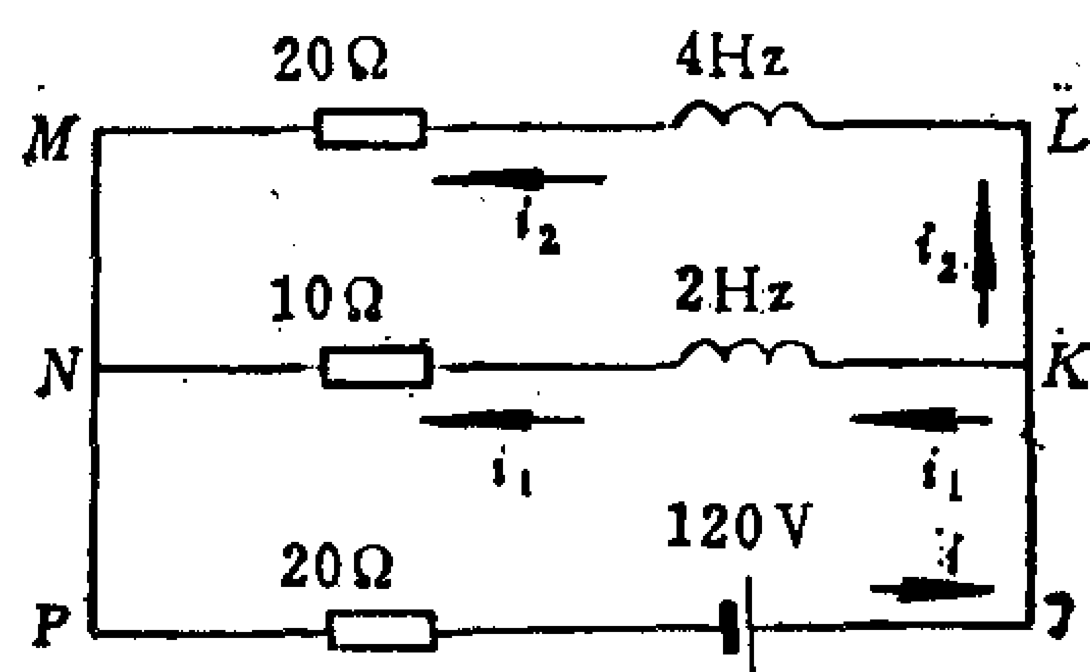


图 1-21

〔例 6〕 已知电路的有关数据如图 1-21 所示，且初始电流为 0，试求各支路上的电流 $i_1(t)$ 及 $i_2(t)$。

解 设 $NPJK$ 中电流为 i，i 在节点 K 处分为 i_1，i_2，所以 $i=i_1+i_2$。

在 $JKNPJ$ 与 $KLMNK$ 回路，分别应用基尔霍夫第一定律，得

$$\begin{cases} 20i-120+2i_1'+10i_1=0 \\ -10i_1-2i_1'+4i_2'+20i_2=0 \end{cases}$$

其中 $i=i_1+i_2$，初始条件为 $i_1(0)=i_2(0)=0$。

● n 阶第一类贝塞尔函数定义为

$$J_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}\quad(n\geqslant 0)$$

可参考本教材《特殊函数》部分。

设$\mathscr{L}\{i_1(t)\}=I_1(p)$，$\mathscr{L}\{i_2(t)\}=I_2(p)$，对方程组取拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases}(30+2p)I_1+20I_2=\dfrac{120}{p}\\ -(10+2p)I_1+(4p+20)I_2=0\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}I_1=\dfrac{60}{p(p+20)}=3\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+20}\right)\\ I_2=\dfrac{30}{p(p+20)}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p+20}\right)\end{cases}$$

于是求逆得

$$\begin{cases}i_1(t)=3(1-e^{-20t})\\ i_2(t)=\dfrac{3}{2}(1-e^{-20t})\end{cases}$$

而

$$i(t)=i_1(t)+i_2(t)=\frac{9}{2}(1-e^{-20t})$$

解完。

〔例7〕 试从方程组

$$\begin{cases}y'+2y+6\int_0^t z\,dt=-2u(t)\\ y'+z'+z=0\end{cases}$$

中解出$y(t)$，已知$y(0)=5$，$z(0)=6$。

解 设$\mathscr{L}\{y\}=Y(p)$，$\mathscr{L}\{z\}=Z(p)$。对方程组取拉普拉斯变换，并利用§1.2中性质（四）（公式（1.2.12）），得一代数方程组

$$\begin{cases}(pY(p)+5)+2Y(p)+\dfrac{6}{p}Z(p)=-\dfrac{2}{p}\\ (pY(p)+5)+(pZ(p)-6)+Z(p)=0\end{cases}$$

简化得

$$\begin{cases}(p^2+2p)Y(p)+6Z(p)=-2-5p\\ pY(p)+(p+1)Z(p)=1\end{cases}$$

解出 $Y(p)$ 并分解为部分分式

$$Y(p)=\frac{\begin{vmatrix}-2-5p & 6\\ 1 & p+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}p^2+2p & 6\\ p & p+1\end{vmatrix}}=\frac{-5p^2-7p-8}{p^3+3p^2-4p}$$

$$=\frac{2}{p}-\frac{4}{p-1}-\frac{3}{p+4}.$$

求逆得

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}=2u(t)-4e^{t}-3e^{-4t}$$

解完。

从以上诸例可以看出，用拉普拉斯变换解常系数线性微分方程及常系数线性微分方程组的优点有四：

1. 它把问题化成代数方程求解。

2. 对于初值问题，它自动计及初始条件从而直接求出特解。

3. 对非齐次项为不连续函数的微分方程（如例 4），仍然能用拉普拉斯变换的办法求解。

4. 运用这种方法时，无论是求非齐次项的象函数，还是最后由求出的解的象函数计算其逆变换，都可以查变换表，从而加速计算过程。值得提出的是，在工程应用上有着详尽的变换表供查用。

***（四）有理分式分解的解析方法**

我们从本节（一）（三）的许多例子的求解过程中可以看出，p 的有理分式求逆问题占有重要地位。对一般的常系数线性微分方程也是这样。我们为说明这一点，从分析 n 阶方程的求解过程开始。

设给定微分方程及初始条件依次为

$$a_0x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t),$$
$$a_0\neq 0,\quad t>0 \qquad (1.3.3)$$

$$x^{(k)}(0)=x_0^{(k)}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n-1)$$

对方程取变换

$$a_0\left[p^nX(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}x_0^{(k)}\right]$$

$$+a_1\left[p^{n-1}X(p)-\sum_{k=0}^{n-2}p^{n-k-2}x_0^{(k)}\right]$$

$$+\cdots+a_{n-1}[pX(p)-x_0^{(0)}]+a_nX(p)=F(p)$$

解出$X(p)$得

$$X(p)$$

$$=\frac{\left[a_0\sum_{k=0}^{n-1}p^{n-k-1}x_0^{(k)}+a_1\sum_{k=0}^{n-2}p^{n-k-2}x_0^{(k)}+\cdots+a_{n-1}x_0^{(0)}\right]+F(p)}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n}$$

$$=\frac{B(p)+F(p)}{A(p)}=\frac{B(p)}{A(p)}+\frac{F(p)}{A(p)}\qquad(1.3.4)$$

其中$A(p)$是原微分方程的特征多项式，$B(p)$为方括号中的p的$n-1$次多项式。再求$X(p)$的逆变换$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{B(p)}{A(p)}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{F(p)}{A(p)}\right\}$，它就是所要求的解$x(t)$。$\frac{B(p)}{A(p)}$与初始条件有关，它对应着原方程所对应的齐次方程的通解，假如把$x_0^{(k)}$ $(k=0,\ 1,\cdots,\ n-1)$都看作任意常数的话。而$\frac{F(p)}{A(p)}$与非齐次项$f(t)$有关，它对应着原非齐次微分方程在全零初始条件下的特解。

当方程（1.3.3）的非齐次项$f(t)$是多项式、指数函数以及它们的乘积时，或是正弦、余弦函数、它们与指数函数及多项式的乘积时，或是双曲正弦、余弦函数时，其象函数$F(p)=\mathscr{L}\{f(t)\}$是p的有理分式(见本书后附表二中公式2～4、6～8、12～19)。这时原微分方程的解$x(t)$的象函数（1.3.4）

$$X(p)=\frac{B(p)+F(p)}{A(p)}$$

便是有理分式。反之，若非齐次项$f(t)$不是上面所列的函数类，这时其象$F(p)$便可能不是有理分式，从而$X(p)$便不是纯粹的有理分式了；但作为$X(p)$的一部分$\frac{B(p)}{A(p)}$还是有理分式。综合以上两种情况表明，不论$f(t)$是什么形式，解微分方程（1.3.3）总会碰到有理分式求逆的问题。

有理分式求逆，首先要把有理分式化为有理真分式与整式的和，再把有理真分式化为部分分式。

有理真分式化为部分分式方法有三：

1．待定系数法；

2．试凑法；

3．利用极限的解析方法。

第1种方法已在高等数学中介绍过。第2种方法要借助于实算体验。这里介绍第3种方法如下：

我们重新设$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$，$A(p)$和$B(p)$是既约多项式，分母次数较分子次数高。

① 若p_0是$B(p)$的单根，即$B(p)=(p-p_0)B_1(p)$，$B_1(p_0)\neq 0$，则在$F(p)$的展开式中，有下列形式的最简分式：

$$\frac{a}{(p-p_0)}$$

其中系数

$$a=\lim_{p\to p_0}\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_0)=\frac{A(p_0)}{B'(p_0)} \qquad (1.3.5)$$

证明 因为$F(p)=\frac{A(p)}{B(p)}$可分为两项之和●：

$$\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a}{(p-p_0)}+\frac{A_1(p)}{B_1(p)}$$

● 参看樊映川等编《高等数学讲义（上册）》§7.6。

其中 $B_1(p)$、$A_1(p)$ 均为多项式。等式两端乘 $(p-p_0)$，再令 $p\to p_0$，就得到 $a=\lim\limits_{p\to p_0}\dfrac{A(p)}{B(p)}(p-p_0)$。再用罗比塔法则，得到 $a=\dfrac{A(p_0)}{B'(p_0)}$。写起来后者方便，用起来有时前者方便。

② 若 p_0 是 $B(p)$ 的 $n\ (n\neq 1)$ 重根，即 $B(p)=(p-p_0)^n B_1(p)$，$B_1(p_0)\neq 0$，则在 $F(p)$ 的展开式中，有下列形式的最简分式之和：

$$\frac{a_1}{(p-p_0)}+\frac{a_2}{(p-p_0)^2}+\cdots+\frac{a_n}{(p-p_0)^n}$$

其中系数 $$a_k=\frac{1}{(n-k)!}\lim_{p\to p_0}\left[\frac{A(p)}{B(p)}\ (p-p_0)^n\right]^{(n-k)}$$
$$(k=1,\ 2,\cdots,\ n) \tag{1.3.6}$$

证明 因为此时 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 可表示为[●]

$$\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_1}{(p-p_0)}+\frac{a_2}{(p-p_0)^2}+\cdots+\frac{a_k}{(p-p_0)^k}+\cdots+\frac{a_n}{(p-p_0)^n}+\frac{A_1(p)}{B_1(p)}$$

等式两端乘 $(p-p_0)^n$

$$\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_0)^n=a_1(p-p_0)^{n-1}+a_2(p-p_0)^{n-2}+\cdots+a_k(p-p_0)^{n-k}+\cdots+a_n+\frac{A_1(p)}{B_1(p)}(p-p_0)^n$$

两边求 $(n-k)$ 阶导数后，右端前 $k-1$ 项及最后一项仍含有因子 $(p-p_0)$，第 k 项变为 $(n-k)!\,a_k$，第 $k+1$ 项直到第 n 项都为 0 。再令 $p\to p_0$，得

$$\lim_{p\to p_0}\left[\frac{A(p)}{B(p)}(p-p_0)^n\right]^{(n-k)}=(n-k)!\,a_k$$

● 参看樊映川等编《高等数学讲义（上册）》§7.6。

从而有（1.3.6）式。

归纳以上两个结果，便有

定理1.3 设$\frac{A(p)}{B(p)}$是有理既约真分式；$p_k(k=1,2,\cdots,m)$是$B(p)$的m个单根，$z_s(s=1,2,\cdots,l)$是$B(p)$的n_s重根；且$m+n_1+n_2+\cdots+n_l=$多项式$B(p)$的次数。则有

$$\frac{A(p)}{B(p)}=\frac{a_1}{p-p_1}+\frac{a_2}{p-p_2}+\cdots+\frac{a_m}{p-p_m}$$
$$+\left[\frac{a_{11}}{p-z_1}+\frac{a_{12}}{(p-z_1)^2}+\cdots+\frac{a_{1n1}}{(p-z_1)^{n1}}\right]$$
$$+\left[\frac{a_{21}}{p-z_2}+\frac{a_{22}}{(p-z_2)^2}+\cdots+\frac{a_{2n2}}{(p-z_2)^{n2}}\right]$$
$$+\cdots$$
$$+\left[\frac{a_{l1}}{p-z_1}+\frac{a_{l2}}{(p-z_l)^2}+\cdots+\frac{a_{ln_l}}{(p-z_l)^{n_l}}\right]$$

其中系数分别由式（1.3.5）与（1.3.6）确定，仅其中字母与字母下标要作相应改写。

〔例8〕 已知$F(p)=\frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)}$，求$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。

解 设$F(p)=\frac{a}{(p-1)}+\frac{b}{(p-i)}+\frac{c}{(p+i)}$

由式（1.3.5）得

$$a=\lim_{p\to 1}[F(p)(p-1)]=\lim_{p\to 1}\frac{3p+1}{p^2+1}=2$$

$$b=\lim_{p\to i}[F(p)(p-i)]=\lim_{p\to i}\frac{3p+1}{(p-1)(p+i)}$$
$$=-1-\frac{i}{2}$$

$$c=\lim_{p\to -i}[F(p)(p+i)]=\lim_{p\to -i}\frac{3p+1}{(p-1)(p-i)}$$
$$=-1+\frac{i}{2}$$

所以

$$F(p)=\frac{2}{p-1}+\frac{-1-\frac{i}{2}}{p-i}+\frac{-1+\frac{i}{2}}{p+i}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=2e^{t}+\left(-1-\frac{i}{2}\right)e^{it}+\left(-1+\frac{i}{2}\right)e^{-it}$$

$$=2e^{t}-(e^{it}+e^{-it})+\frac{1}{2i}(e^{it}-e^{-it})$$

$$=2e^{t}-2\cos t+\sin t$$

〔例 9〕 已知$F(p)=\frac{p^2+2p+3}{(p+1)^3}$，求$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。

解 设$F(p)=\frac{a_1}{(p+1)}+\frac{a_2}{(p+1)^2}+\frac{a_3}{(p+1)^3}$

由式 (1.3.6) 得

$$a_1=\frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}[F(p)(p+1)^3]''$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{p\to-1}[p^2+2p+3]''=1$$

$$a_2=\frac{1}{1!}\lim_{p\to-1}[F(p)(p+1)^3]'$$

$$=\lim_{p\to-1}[p^2+2p+3]'=0$$

$$a_3=\lim_{p\to-1}[F(p)(p+1)^3]=\lim_{p\to-1}[p^2+2p+3]=2$$

所以

$$F(p)=\frac{1}{p+1}+\frac{2}{(p+1)^3}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}+\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(p+1)^3}\right\}$$

$$=e^{-t}+t^2e^{-t}$$

其中用到公式

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+p_0)^n}\right\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_0t}$$

(参看§1.2例9)。

最后需要指出的是，举上面两例是为了说明方法。但对这两个具体题目来说，所用方法并不简便。如例8中，$F(p)$ 不必在复数域，只要在实数域中化为最简分式，设

$$F(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{Bp+C}{p^2+1}$$

再用初等方法确定其中的待定常数 A、B、C。又如例9，只要把 $F(p)$ 的分子写成 $(p^2+2p+1)+2=(p+1)^2+2$，就很容易化为最简分式了。

为求有理分式的逆变换，是否一定要先将它分解为最简分式之和呢？回答是否定的。我们将在下一章§2.7中介绍像函数直接求逆的留数方法，该法并不需先分解有理分式。此外，查专门的变换表也是一种实用方法。例如，《拉普拉斯变换原理》(〔美〕C. J. 沙万特著，李哲岩等译，陕西科学技术出版社1984年出版)一书中，作者收集了E. C. 列威的拉普拉斯变换表中的5个表，都是有理分式的求逆公式，其中有理分式分母最高为5次多项式。

§1.4　卷积定理　初值与终值定理

本节讨论卷积定义、性质，卷积定理，初值及终值定理。

(一) 卷积的定义

定义　对函数 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$，我们考虑含参变量 t 的积分 $\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$，这个 t 的函数，称作函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的**卷积函数**，简称**卷积**，记作 $f_1(t)*f_2(t)$ 或 f_1*f_2：

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du \qquad (1.4.1)$$

〔例1〕　计算 $f_1(t)=e^t$ 与 $f_2(t)=t^2$ 的卷积。

解

$$e^t*t^2=\int_0^t e^u(t-u)^2du$$

$$=\int_0^t e^u(t^2-2tu+u^2)du$$

$$= t^2\int_0^t e^u du - 2t\int_0^t ue^u du + \int_0^t u^2e^u du$$

$$= 2e^t - t^2 - 2t - 2$$

〔例 2〕 已知 $f(t) = t \quad (t \geqslant 0)$，且

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & t > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

试求 $f * g$。

解 因为由 $g(t)$ 的表达式有

$$g(t-u) = \begin{cases} \sin(t-u) & \left(0 \leqslant t-u \leqslant \frac{\pi}{2},\ \text{即 } t - \frac{\pi}{2} \leqslant u \leqslant t\right) \\ 0 & \left(t-u > \frac{\pi}{2},\ \text{即 } u < t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

所以当 $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，卷积

$$f * g = \int_0^t f(u) g(t-u) du \qquad (1.4.2)$$

中的积分变量 u 从 0 变到 t，从而 $t - \frac{\pi}{2} \leqslant 0 \leqslant u \leqslant t$，故此时据 $g(t-u)$ 的表达式，有

$$f * g = \int_0^t u\sin(t-u) du = t - \sin t$$

当 $t > \frac{\pi}{2}$ 时，卷积 (1.4.2)式中的积分变量 u 从 0 递增变到 t 时中间要经过 $t - \frac{\pi}{2}$，所以据 $g(t-u)$ 的表示式，有

$$f*g=\int_0^{t-\frac{\pi}{2}} f(u)g(t-u)du$$

$$+\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} f(u)g(t-u)du$$

$$=\int_0^{t-\frac{\pi}{2}} u\cdot 0du+\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} u\sin(t-u)du$$

$$=0+t-1$$

综合以上计算结果，便得出：

$$f*g=\begin{cases} t-\sin t & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2} \\ t-1 & t>\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

(二) 卷积性质

卷积有性质：

交换律 $f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$

结合律 $\{f_1(t)*f_2(t)\}*f_3(t)$

$=f_1(t)*\{f_2(t)*f_3(t)\}$

分配律 $\{f_1(t)+f_2(t)\}*f_3(t)$

$=f_1(t)*f_3(t)+f_2(t)*f_3(t)$

下面我们只证明交换律，而把其他证明留给读者作练习。利用积分变量代换 $t-u=v$ 将卷积 $f_1(t)*f_2(t)$ 的积分变量由 u 换成 v，便有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$$

$$=-\int_t^0 f_1(t-v)f_2(v)dv$$

$$=\int_0^t f_2(v)f_1(t-v)dv$$

$$=f_2(t)*f_1(t)$$

证完。

利用交换律我们可以简化例 2 的计算：

$$f*g=g*f=\int_0^t g(u)f(t-u)du$$

$$=\int_0^t g(u)(t-u)du$$

$$=\begin{cases}\int_0^t \sin u\cdot(t-u)du=t-\sin t \\ \qquad \left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\text{时}\right) \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin u\cdot(t-u)du+\int_{\frac{\pi}{2}}^0 0du=t-1 \\ \qquad \left(\frac{\pi}{2}<t\text{ 时}\right)\end{cases}$$

结果与例 2 同。

（三）卷积定理

两个函数卷积的像函数，等于两个函数各自的像函数的乘积，即

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\mathscr{L}\{f_1(t)\}\cdot\mathscr{L}\{f_2(t)\} \qquad (1.4.3)$$

证明 由定义并把累次积分看成是展布在 uot 平面上楔形区域 S（图 1-22）内的一个二重积分，再交换积分顺序，可得

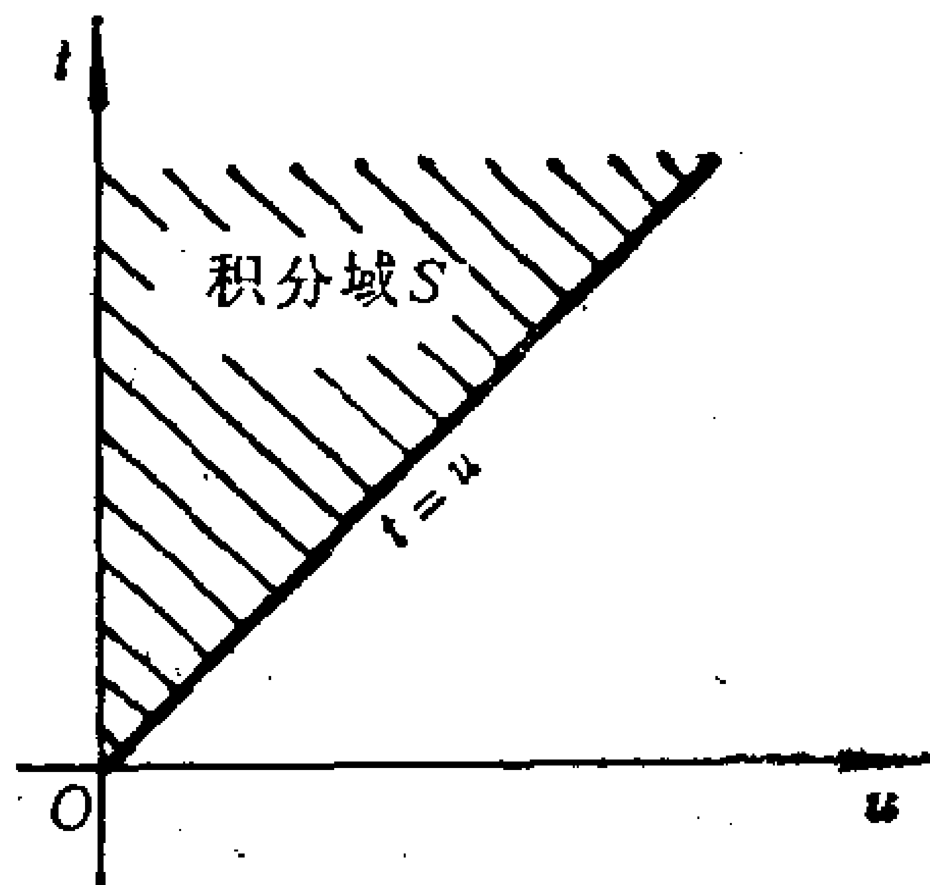


图 1-22

$$\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_0^{+\infty}\left[\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du\right]e^{-pt}dt$$

$$=\iint_{(S)} f_1(u)f_2(t-u)e^{-pt}dudt$$

$$=\int_0^{+\infty}f_1(u)\left[\int_u^{+\infty}f_2(t-u)e^{-pt}dt\right]du$$

在内层积分中令 $t-u=t_1$，得

$$\int_u^{+\infty}f_2(t-u)e^{-pt}dt=e^{-pu}$$

$$\int_{0}^{+\infty} f_2(t_1)e^{-pt_1}dt_1,$$

所以

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}\{f_1(t)*f_2(t)\}\\&=\int_0^{+\infty}f_1(u)\left[e^{-pu}\int_0^{+\infty}f_2(t_1)e^{-pt_1}dt_1\right]du\\&=\int_0^{+\infty}f_1(u)e^{-pu}du\cdot\int_0^{+\infty}f_2(t_1)e^{-pt_1}dt_1\\&=\mathscr{L}\{f_1(t)\}\cdot\mathscr{L}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

证完。

易由（1.4.3）式得到

卷积定理的等价形式 两个像函数 $F_1(p)$ 与 $F_2(p)$ 之积，等于它们所对应的像原函数 $\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)\}$ 与 $\mathscr{L}^{-1}\{F_2(p)\}$ 的卷积的像函数。也就是说：积 $F_1(p)F_2(p)$ 的逆像，是他们每一个的逆像的卷积。用式子表示便是

$$F_1(p)F_2(p)=\mathscr{L}\{\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)\}*\mathscr{L}^{-1}\{F_2(p)\}\} \tag{1.4.4}$$

或

$$\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)F_2(p)\}=f_1(t)*f_2(t) \tag{1.4.5}$$

其中 $\mathscr{L}^{-1}\{F_1(p)\}=f_1(t)$，$\mathscr{L}^{-1}\{F_2(p)\}=f_2(t)$

〔例 3〕 求 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(p^2+a^2)^2}\right\}$

解 令 $F_1(p)=F_2(p)=\dfrac{1}{p^2+a^2}$，则 $f_1(t)=f_2(t)=\dfrac{1}{a}\sin at$，由（1.4.5）式得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right\}&=\frac{1}{a^2}\sin at*\sin at\\&=\frac{1}{a^2}\int_0^t\sin au\sin a(t-u)du\\&=\frac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)\end{aligned}$$

〔例 4〕 质量为 m 的物体，挂在刚度为 k 的铅垂弹簧的一

端，作用在物体上有外力 $f(t)$ $(t>0)$ 及与瞬时速度成正比的阻力。设物体自静平衡点 $x=0$ 开始运动，x 轴的正方向朝下，试求该物体的运动规律 $x=x(t)$。

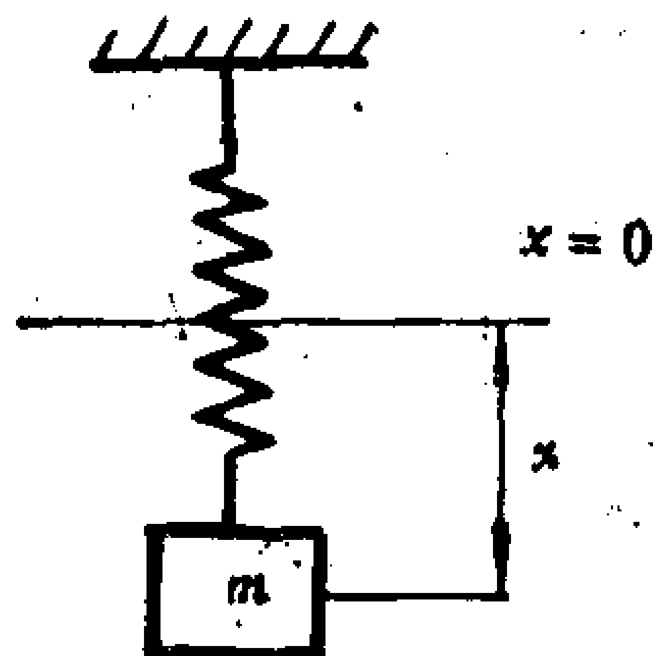


图 1-23

解 设阻力为 $-\beta x'$（其中 $\beta>0$ 为阻尼系数），恢复力是 $-kx$，则由牛顿定律得

$$mx''=-\beta x'-kx+f(t)$$

或

$$mx''+\beta x'+kx=f(t)$$

其初始条件为

$$x(0)=0,\quad x'(0)=0$$

对微分方程两边取拉普拉斯变换，得

$$(mp^2+\beta p+k)X(p)=F(p)$$

解得

$$X(p)=\frac{F(p)}{mp^2+\beta p+k}=\frac{F(p)}{m\left[\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2+R\right]} \tag{1.4.6}$$

其中

$$R=\frac{k}{m}-\frac{\beta^2}{4m^2}$$

情况 1 当 $R>0$ 时（即小阻尼时），令 $R=\omega^2$，我们有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2+\omega^2}\right\}=e^{-\frac{\beta t}{2m}}\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

利用卷积定理（1.4.5）式，由（1.4.6）式得

$$x(t)=\frac{1}{m}\left(e^{-\frac{\beta t}{2m}}\cdot\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)*f(t)$$

$$=\frac{1}{\omega m}\int_0^t f(u)e^{\frac{-\beta(t-u)}{2m}}\cdot\sin\omega(t-u)du \tag{1.4.7}$$

情况 2　当$R=0$时（即临界阻尼时），我们有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2}\right\}=te^{-\frac{\beta t}{2m}}$$

利用卷积定理（1.4.5）式，由（1.4.6）式，得

$$x(t)=\frac{1}{m}\left(te^{-\frac{\beta t}{2m}}\right)*f(t)$$

$$=\frac{1}{m}\int_0^t f(u)(t-u)e^{-\frac{\beta(t-u)}{2m}}du$$

情况 3　当$R<0$时（即大阻尼时），我们令$R=-\alpha^2$，则有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2+R}\right\}=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(p+\frac{\beta}{2m}\right)^2-\alpha^2}\right\}$$

$$=e^{-\frac{\beta t}{2m}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\alpha t}{\alpha}$$

利用卷积定理（1.4.5）式，由（1.4.6）式得

$$x(t)=\frac{1}{m}\left(e^{-\frac{\beta t}{2m}}\cdot\frac{\mathrm{sh}\alpha t}{\alpha}\right)*f(t)$$

$$=\frac{1}{\alpha m}\int_0^t e^{-\frac{\beta(t-u)}{2m}}\cdot\mathrm{sh}\alpha(t-u)f(u)du$$

由上可知，对任意的外力$f(t)$来说，求该物体的运动规律问题，变成了仅计算一个积分的问题。在推算过程中，卷积定理起了关键作用。

当$f(t)$是某些特殊类型的函数时，则方程的解$x(t)$可由式（1.4.6）并直接利用变换表得到。

作为**特殊情况**，我们假设无阻力，这时阻尼系数$\beta=0$。再设外力为周期力：$f(t)=A\sin\omega_0 t$。则由（1.4.7）式得运动方程为

$$x(t)=\frac{1}{\omega m}\int_0^t A\sin\omega_0 u\cdot\sin\omega(t-u)du$$

查积分表得

$$x(t)=\frac{A}{\omega m}\left(\frac{\sin[\omega_0 u-\omega(t-u)]}{2(\omega_0+\omega)}-\frac{\sin[\omega_0 u-\omega(t-u)]}{2(\omega_0-\omega)}\right)_{u=0}^{u=t}$$

$$=\frac{A}{\omega m}\left(\frac{\sin\omega_0 t}{2(\omega_0+\omega)}-\frac{\sin\omega_0 t}{2(\omega_0-\omega)}+\left\{\frac{\sin\omega t}{2(\omega_0+\omega)}+\frac{\sin\omega t}{2(\omega_0-\omega)}\right\}\right)$$

$$=\frac{A}{m\omega(\omega_0^2-\omega^2)}(\omega_0\sin\omega t-\omega\sin\omega_0 t)\qquad(\omega\neq\omega_0)$$

由此可知，当该系统的固有频率ω和外干扰力频率ω_0不相等时，物体的振动为两个不同频率振动的合成。当$\omega_0=\omega$或者$\omega_0\approx\omega$时，由于这个合成振动的振幅无限增大，便产生破坏性的共振现象。

（四）初值定理

定理 设函数 $f(t)$ 及其导数 $f'(t)$ 都满足定理1.1的条件，则

$$f(0^+)=\lim_{p\to+\infty} pF(p) \tag{1.4.8}$$

证明 一方面，由式（1.1.8）知，当 $p\to+\infty$ 时，满足定理1.1条件的 $f'(t)$ 的像函数应趋向零，即

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt\to 0 \quad (\text{当 } p\to+\infty \text{时})$$

另一方面，由导数的像函数公式（1.2.2)式

$$\mathscr{L}\{f'(t)\}=\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=pF(p)-f(0^+)$$

其中令 $p\to+\infty$，再与前式比较，得

$$\lim_{p\to+\infty}[pF(p)-f(0^+)]=0$$

即
$$f(0^+)=\lim_{p\to+\infty} pF(p)$$

（五）终值定理

定理 设 $f(t)$ 及 $f'(t)$ 都满足定理1.1的条件且 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ 存在，$pF(p)$ 在包含虚轴的右半 p 平面解析，则

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p) \tag{1.4.9}$$

证明 在导数的像函数公式（1.2.5）中，令 $p\to 0$，得

$$\lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt=\lim_{p\to 0}[pF(p)-f(0)]$$
$$=\lim_{p\to 0} pF(p)-f(0)$$

另一方面，在积分号下取极限，则由 $\lim\limits_{p\to 0} e^{-pt}=1$，得

$$\lim_{p\to 0}\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}\,dt=\int_0^{+\infty} f'(t)dt=f(t)\Big|_0^{+\infty}$$
$$=\lim_{t\to+\infty} f(t)-f(0)$$

比较上述两式，得 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{p\to 0} pF(p)$

注意，对于一个给定的问题，在用终值定理之前，必先判断定理所有条件是否都满足。例如 $f(t)=\sin\omega t$，$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ 不存在，且 $pF(p)=\dfrac{p\omega}{p^2+\omega^2}$ 在虚轴上有极点 $\pm\omega i$。对这样的函数，不能用终值定理。但是，对它初值定理还是成立的：

$\lim\limits_{t\to 0^+}\sin\omega t=0$，而 $\lim\limits_{p\to+\infty} pF(p)=\lim\limits_{p\to+\infty}\dfrac{p\omega}{p^2+\omega^2}=0$。

又如 $F(p)=\dfrac{1}{p(p+\alpha)}$（其中 $\alpha>0$），$pF(p)=\dfrac{1}{p+\alpha}$ 满足终值定理的条件（在包括虚轴的右半面上没有奇点），所以由终值定理可知，像原函数 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{p\to 0}\frac{1}{p+\alpha}=\frac{1}{\alpha}$$

这个结果是不难验证的。因为

$$F(p)=\frac{1}{p(p+\alpha)}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+\alpha}\right)$$

所以 $$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

显然 $$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to+\infty}(1-e^{-\alpha t})=\frac{1}{\alpha}$$

初值定理与终值定理使我们能根据已知的像函数 $F(p)$，去预测像原函数的初值与终值（即稳定状态），而不必先去直接求出像原函数 $f(t)$ 的本身。例如，已知 $F(p)=\dfrac{1.06}{p[p(p+1)(p+2)+1.06]}$（它所对应的像原函数是某系统对单位阶跃输入的响应，参看绪方胜彦著《现代控制工程》中译本第221页），由 $F(p)$ 可以算出

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=1-0.103e^{-2.33t}-e^{-0.33t}$$
$$(0.897\cos 0.58t+0.933\sin 0.58t)$$

(图1-24) 计算过程是复杂的，因为若要把有理分式$F(p)$化为部分分式，首先要算出分母的根。分母是p的四次多项式，需用近似方法才能求出四个根为：0，-2.33，$-0.33\pm 0.58i$。但是，若我们仅需知道$f(t)$的终值（即稳态值），就无须进行上述计算，直接用终值定理就可以了，即

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$$

$$=\lim_{p\to 0}\frac{1.06}{p(p+1)(p+2)+1.06}=1$$

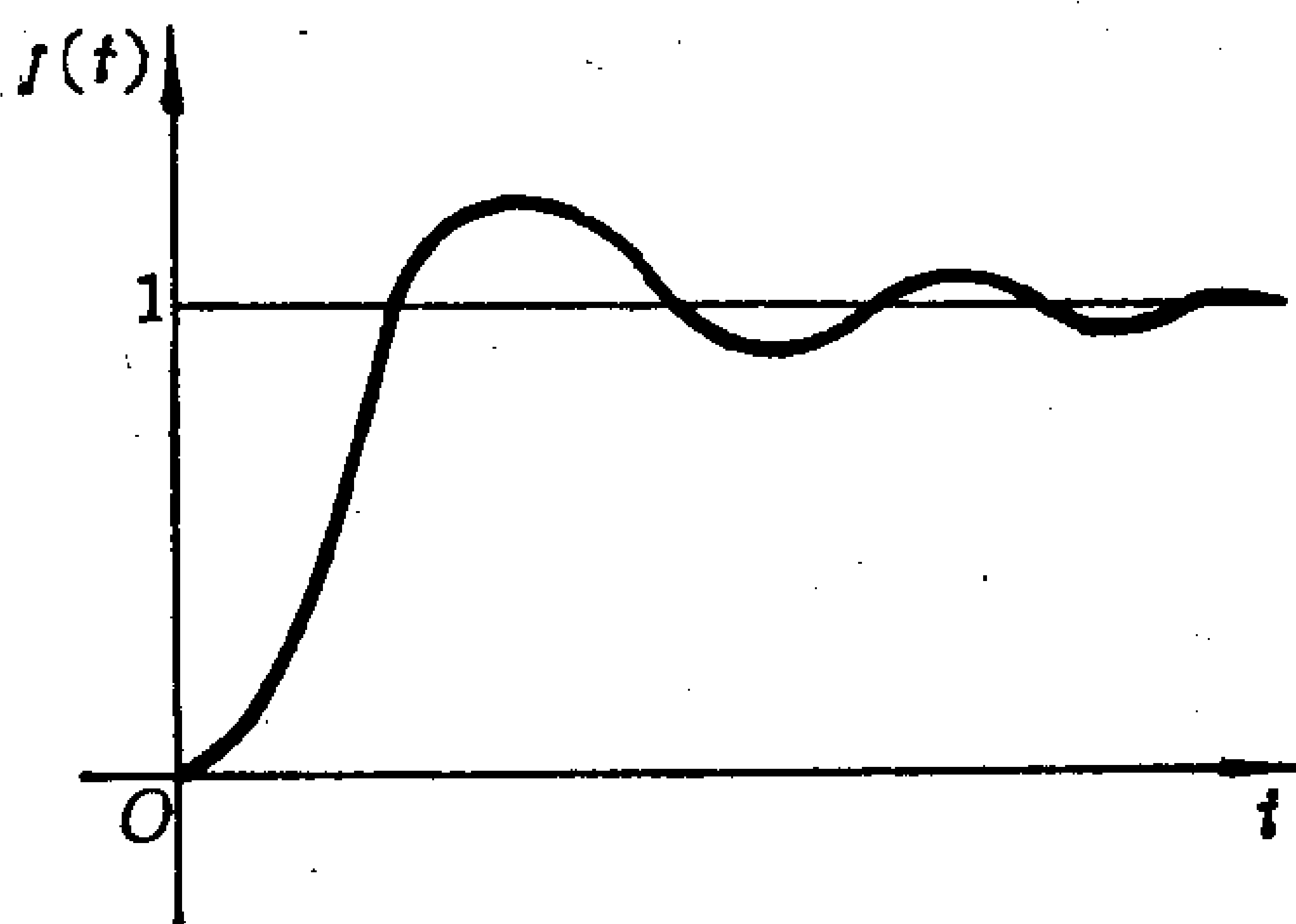


图 1-24

*§1.5 拉普拉斯变换在其他方面的应用

本节介绍在某些应用学科中占重要地位的传递函数概念，并举例说明怎样用拉普拉斯变换解某些偏微分方程、积分方程以及其他类型的方程。

(一) 传递函数概念

线性定常系统的传递函数，定义为在全零初始条件下，输出量的拉普拉斯变换与输入量的拉普拉斯变换之比。线性定常系统，可用常系数线性微分方程表示。我们以二阶的为例，其方程最简

单的便是

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=f(t)$$

其中 $f(t)$ 称为**输入量**，它常常表示外力（强迫力）等；该微分方程的解 $y=y(t)$ 称为**输出量**，它常常表示运动。下面我们通过实例来进一步阐明上述物理概念。

〔例 1〕 线性机械振动系统(图1-25)

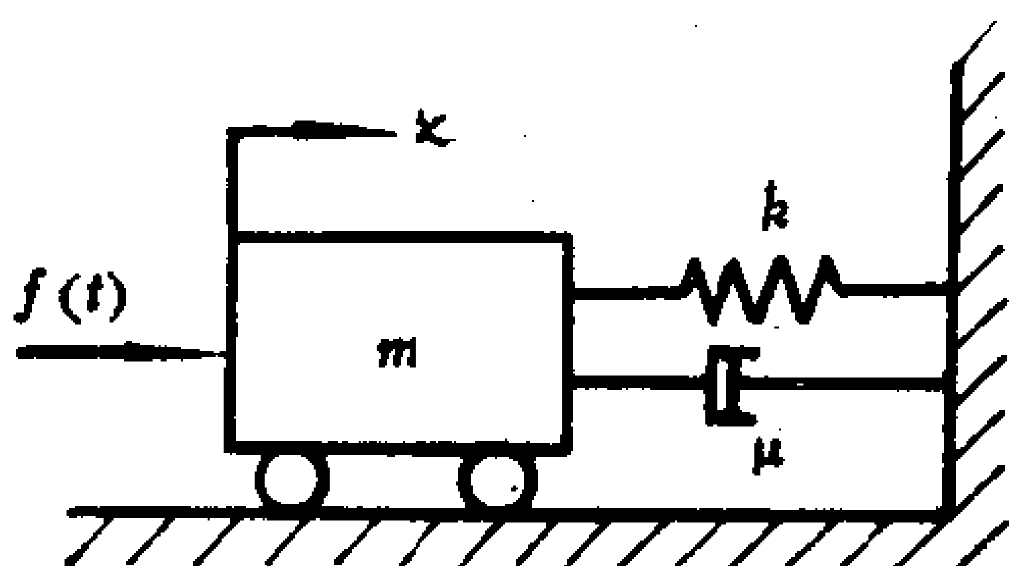


图 1-25

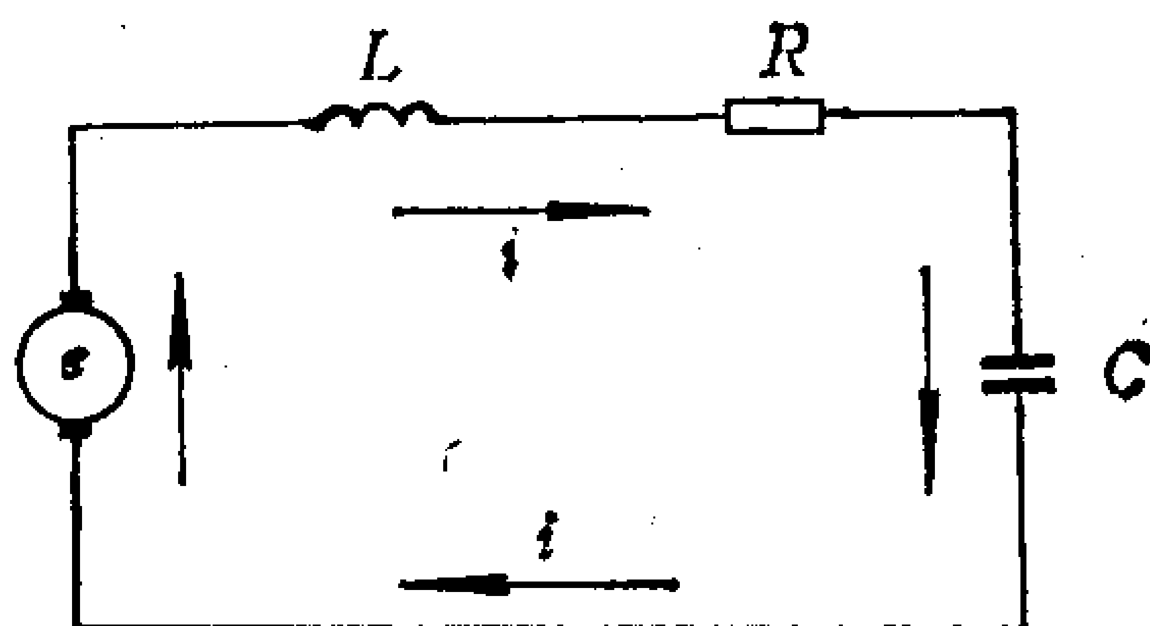


图 1-26

设 m、μ、k 分别表示质量、阻尼系数、弹性系数，它们是已知的系统参数。输入是外干扰力 $f(t)$，输出位移 $x(t)$。由牛顿第二定律，可得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+kx=f(t) \tag{1.5.1}$$

在零初始条件下，对方程取拉普拉斯变换。因为 $x(0)=x'(0)=0$，所以

$$mp^2X(p)+\mu pX(p)+kX(p)=F(p)$$

即

$$(mp^2+\mu p+k)X(p)=F(p)$$

若取 $X(p)$ 与 $F(p)$ 的比，可得系统的传递函数：

$$\text{传递函数}=G(p)=\frac{X(p)}{F(p)}=\frac{1}{mp^2+\mu p+k}$$

显然，它与外力无关，仅与系统参数有关。

〔例 2〕 $L-R-C$ 电路（图1-26）

设 L、R、C 分别表示电感、电阻、电容，它们是已知的

系统参数。由基尔霍夫第一定律，得到电路微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_0^t idt=e(t)$$

如果用电量 q 的形式表示，因 $\frac{dq}{dt}=i$，上述方程可以写成

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=e(t) \qquad (1.5.2)$$

其中电压 $e(t)$ 是输入，电量 q 是输出。在零初始条件 $q(0)=q'(0)=0$ 下，对上述方程取拉普拉斯变换，得到

$$Lp^2Q(p)+RpQ(p)+\frac{1}{C}Q(p)=E(p)$$

$$\left(Lp^2+Rp+\frac{1}{C}\right)Q(p)=E(p)$$

求 $Q(p)$ 与 $E(p)$ 之比，可得系统的传递函数：

$$\text{传递函数}=G(p)=\frac{Q(p)}{E(p)}=\frac{1}{Lp^2+Rp+\frac{1}{C}}$$

显然，它仅与系统参数有关。

一般地，设有一 n 阶线性定常系统，它的微分方程为

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny$$
$$=b_0x^{(m)}+b_1x^{(m-1)}+\cdots+b_{m-1}x'+b_mx \quad (n\geqslant m)$$

式中 $y(t)$ 是系统的输出，$x(t)$ 是系统的输入。在零初始条件 $x(0)=x'(0)=\cdots x^{(m-1)}(0)=y(0)=y'(0)=\cdots y^{(n-1)}(0)=0$ 下，对方程取拉普拉斯变换，得到

$$a_0p^nY(p)+a_1p^{n-1}Y(p)+\cdots+a_{n-1}pY(p)+a_nY(p)$$
$$=b_0p^mX(p)+b_1p^{m-1}X(p)+\cdots+b_{m-1}pX(p)+b_mX(p)$$
$$(a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_{n-1}p+a_n)Y(p)$$
$$=(b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_{m-1}p+b_m)X(p)$$

于是可求得该系统的传递函数：

$$传递函数 = G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$
$$= \frac{b_0p^m + b_1p^{m-1} + \cdots + b_{m-1}p + b_m}{a_0p^n + a_1p^{n-1} + \cdots + a_{n-1}p + a_n}$$

传递函数只与系统参数 a_i、b_i 有关，而与输入 $x(t)$ 取什么形式无关，它表达了系统本身的特性。应该指出的是，许多物理性质不同的系统，可以有相同的传递函数。例如比较方程(1.5.1)与(1.5.2)，可看出这两个不同的系统的微分方程具有相同的形式，所以传递函数形式也是相同的（分子为1，分母为 p 的二次多项式）。这样的系统叫做**相似系统**，而在微分方程中占据相同位置的物理量，叫做**相似量**。下表中列出了这两个不同系统的相似量。这里讨论的相似性，叫做**力-电压相似性**。应用上，常常把研究机械系统的问题，转化为研究电路系统的问题（或者倒过来），便是利用了这种相似性。

力-电压相似性中的相似量表

机械位移系统	电　系　统
力 f	电压 e
质量 m	电感 L
阻尼系数 μ	电阻 R
弹性系数 k	电容 C 的倒数 $1/C$
位移 x	电量 q
速度 x'	电流强度 $q' = i$

由于传递函数有着代表系统本身固有特性的这个特征，因此在实际工作中，往往不直接解微分方程，而是用各种别的数学方法（代数的、几何的、分析的等等），定量或定性地分析系统的传递函数 $G(p)$ 或频率特性 $G(i\omega)$。用这种间接的办法，去认识 $G(p)$ 或 $G(i\omega)$ 所代表的实际系统的"品质"，这是控制论及电学讨论的问题之一。

我们再举一个求传递函数的实例。

〔例 3〕 设有两个自由度的线性系统如图1-27。系统参数均

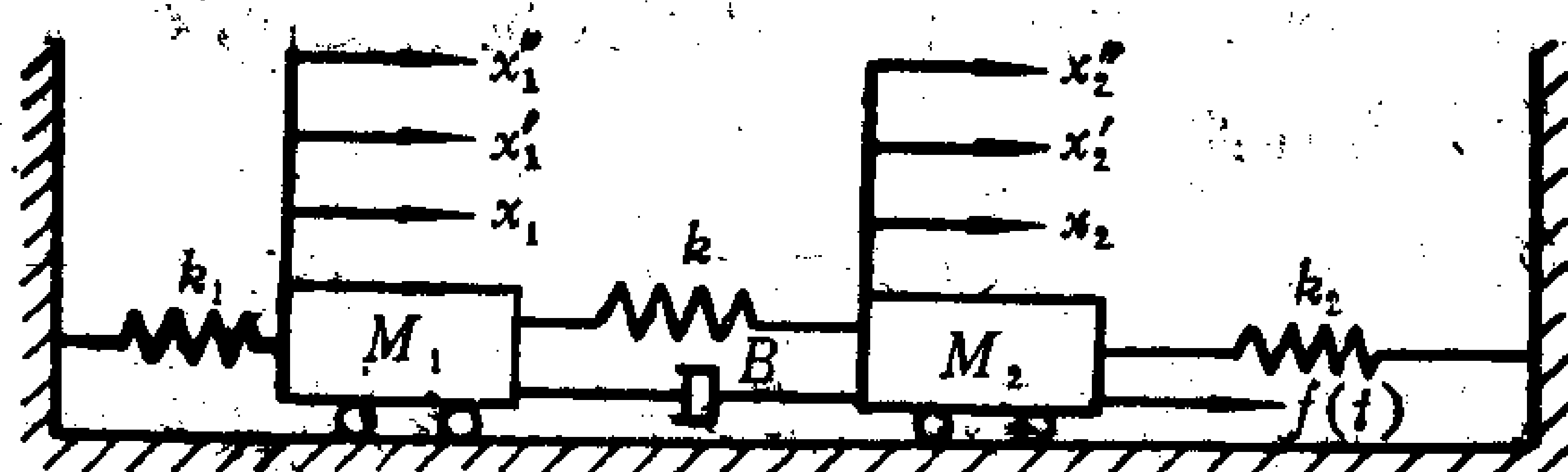


图 1-27

为已知，M_1、M_2 为质量，k、k_1、k_2 为弹性系数，B为阻尼系数。该装置静止时，三个弹簧都是原来长度，设此时 M_1 的位置为 $x_1=0$，M_2 的位置为 $x_2=0$。坐标轴 x_1 与 x_2 的正向如图所示。设 M_1 的位移为 $x_1=x_1(t)$，M_2 的位移为 $x_2=x_2(t)$。作用在 M_2 上的外力 $f(t)$，影响着 M_1 的运动；若把 $f(t)$ 看作输入，M_1 的位移$x_1(t)$ 认作是输出，试求该系统的传递函数 $X_1(p)/F(p)$。

解 由于弹簧 k 与阻尼B对 M_1 的作用，分别取决于 M_1 对 M_2 的相对位移 (x_1-x_2) 与相对速度 $(x_1'-x_2')$，所以 k 作用在 M_1 上的恢复力 $f_k=k(x_1-x_2)$●，B作用在M_1 的阻尼力为$f_B=B(x_1'-x_2')$。同理，k 与 B 作用在 M_2 上的恢复力与阻尼力分别为 $k(x_2-x_1)$ 与 $B(x_2'-x_1')$。

分别取受力分离体 M_1 及 M_2 如图1-28。

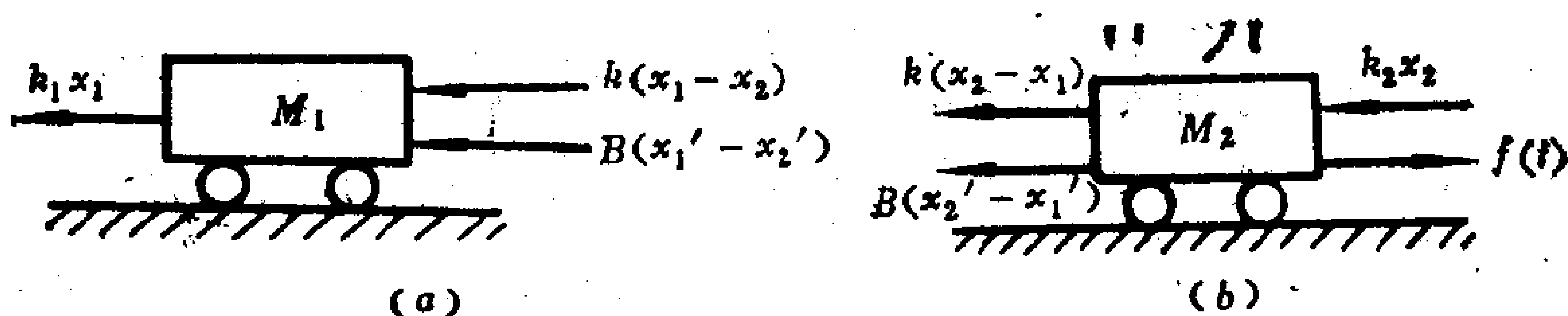


图 1-28

由牛顿第二定律，分别求出 M_1 及 M_2 的微分方程为

$$\begin{cases} M_1x_1''=-k_1x_1-k(x_1-x_2)-B(x_1'-x_2') \\ M_2x_2''=-k_2x_2-k(x_2-x_1)-B(x_2'-x_1')+f(t) \end{cases}$$

● 若考虑方向，应为 $f_k=-k(x_1-x_2)$，因恢复力与相对位移 (x_1-x_2) 是反号的。f_B也是这样。

在零初始条件下，对上微分方程组取拉普拉斯变换，得到 $X_1(p)$，$X_2(p)$ 的代数方程组

$$\begin{cases}(M_1p^2+Bp+k_1+k)X_1(p)+(-Bp-k)X_2(p)=0\\(-Bp-k)X_1(p)+(M_2p^2+Bp+k_2+k)X_2(p)=F(p)\end{cases}$$

求解可得

$$\text{传递函数}\,G(p)=\frac{X_1(p)}{F(p)}$$

$$=(Bp+k)/\{M_1M_2p^4+B(M_1+M_2)p^3+[M_1(k+k_2)+M_2(k+k_1)]p^2+B(k_1+k_2)p+k_1k_2+k(k_1+k_2)\}$$

这个系统是 4 阶的，因为分母是 p 的 4 次多项式。

（二）解偏微分方程举例

〔**例 4**〕 求当 $x>0$，$t>0$ 时，热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \tag{1.5.3}$$

满足条件

$$\begin{cases}u(0,\ t)=\varphi(t)\text{——边界条件} & (1.5.4)\\ u(x,\ 0)=0\qquad\text{——初始条件} & (1.5.5)\end{cases}$$

的解。

说明

这是一个半无穷长细棒（$0\leqslant x<+\infty$）的温度 $u(x,\ t)$ 的分布问题。已知条件表明，该棒初始温度处处为零（初始条件）；且在棒左端点 $x=0$ 处，温度变化规律 $\varphi(t)$ 为已知（边界条件）。

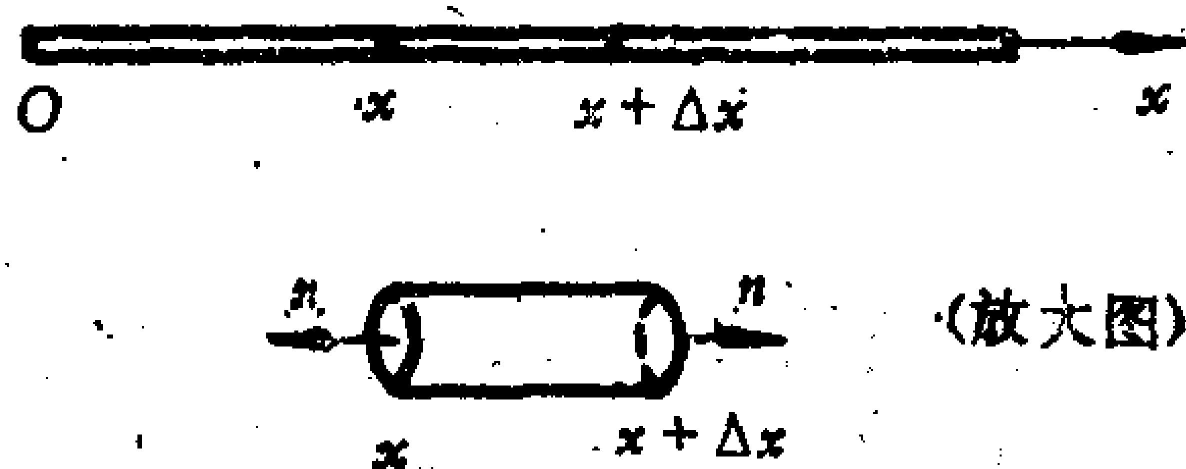


图 1-29

关于热传导方程，我们作补充推导如下：设一均匀导热的细棒如图1-29，设其上的温度分布为 $T=u(x,\ t)$，其中 x 为棒上某点坐标，t 为时间。为使问题简化，再设该棒与棒外介质无热量交换，并设棒内部没有其他热源（无论是正源还是负源）。

我们考虑棒上微元$[x,\ x+\Delta x]$。其横截面积为一常量，设为ΔS。由热力学知，在时间$[t,\ t+\Delta t]$内，自点x处通过小横截面流入的热量与时间间隔Δt、截面积ΔS、温度沿截面外法线方向的变化率$\frac{\partial u}{\partial n}$成正比，即流入热量为

$$K\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_x \Delta S\cdot\Delta t=-K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x \Delta S\cdot\Delta t\left(\text{这时}\frac{\partial u}{\partial n}=-\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

同理，自点$x+\Delta x$流入热量为

$$K\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x+\Delta x} \Delta S\cdot\Delta t=K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} \Delta S\cdot\Delta t,$$

$$\left(\text{这时}\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

其中K为该棒的热传导系数。综合以上结果，便知Δt时间内流入微元的总热量为

$$K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x+\Delta x} \Delta S\cdot\Delta t-K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x \Delta S\cdot\Delta t=K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x+\theta\Delta x}\Delta S\cdot\Delta t$$

$$(0<\theta<1)。$$

另一方面，由热学可知，物体热量的变化与其质量以及温度变化成正比。所以微元上热量的改变量为

$$c\cdot\Delta m\cdot\Delta u=c\rho\cdot\Delta S\cdot\Delta x\cdot\Delta u$$

其中c为比热，Δm为微元质量，ρ为棒体密度，$\Delta u=u(x,\ t+\Delta t)-u(x,\ t)$。

由热量守恒定律，便有

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}\bigg|_{x+\theta\Delta x}\Delta S\cdot\Delta t=c\rho\Delta S\cdot\Delta X\cdot\Delta u$$

等式两边同除$\Delta S\cdot\Delta t$，且令$\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$，便得

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

再令$a^2=\frac{K}{c\rho}$，便得方程（1.5.3）。

解 先把x看作参数，在方程（1.5.3）两端都乘上e^{-pt}，然后对t从0到$+\infty$积分——也就是对变量t取拉普拉斯变换。记

$$\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=\int_0^{+\infty}u(x,\ t)e^{-pt}dt=U(x,\ p)$$

显然它是 x、p 的二元函数。因

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=pU(x,\ p)-u(x,\ 0)=pU(x,\ p)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,\ t)\cdot e^{-pt}dt$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,\ t)e^{-pt}dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,\ p)$$

$$\mathscr{L}\{u(0,\ t)\}=\mathscr{L}\{\varphi(t)\}=\Phi(p)=U(0,\ p)$$

若把 p 暂时看作常数，则变换后的式（1.5.3）及边界条件变为

$$\begin{cases} pU=a^2\dfrac{d^2}{dx^2}U & (1.5.6) \\ U|_{x=0}=\Phi(p) & (1.5.7) \end{cases}$$

解（1.5.6），得

$$U=c_1e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+c_2\ e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

由问题的物理意义知，在 $x\to+\infty$ 时解 $u(x,\ t)$ 是有界的，从而它的像函数 $U(x,\ p)$ 也有界，不应无限制增大●，所以 $c_2=0$。又由条件（1.5.7），得 $c_1=\Phi(p)$，所以

$$U=\Phi(p)e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

再求它的逆变换，便得出欲求的解 $u(x,\ t)$。

特殊情况：当 $\varphi(t)=u_0$ 即棒的端点为恒温时，$\Phi(p)=\dfrac{u_0}{p}$

$$U=\frac{u_0}{p}\ e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

● 这里 $u(x,\ t)$ 表示温度，温度不可能无界，设 $|u(x,\ t)|<M$，则 $|U(x,p)|=\left|\int_0^{+\infty}u(x,\ t)e^{-pt}dt\right|\leqslant M\int_0^{+\infty}|e^{-pt}|dt=\dfrac{M}{\text{Re}\,p}$ (Re $p>0$)，所以 $U(x,\ p)$ 对 x 而言，是有界的。

查变换表（附表二公式31），得到温度分布函数

$$u(x,\ t)=u_0\left(1-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}e^{-y^2}dy\right)$$

解完。

假若我们当初将方程（1.5.3）对变量x而不是对变量t取拉普拉斯变换，情况会怎样呢？设$\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=U(p,\ t)$，由于

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-px}dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{+\infty}u(x,\ t)e^{-px}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}U(p,\ t)$$

对方程（1.5.3）取对x的拉普拉斯变换，并利用公式（1.2.6），得

$$\frac{\partial}{\partial t}U(p,\ t)=a^2[p^2U(p,\ t)-pu(0,\ t)-u'_x(0,\ t)]$$

（1.5.8）

其中$u(0,\ t)$固然原已给出为$\varphi(t)$，但$u'_x(0,\ t)$却是不知道的。所以式（1.5.8）不是一个确定的方程，无法继续对$U(p,\ t)$求解。这便是原方程不对x取拉普拉斯变换的原因。

我们可以用拉普拉斯变换去解更一般的常系数线性偏微分方程。为说明解法，再以缺混合项的一般二阶方程为例。

〔例5〕 求二阶常系数线性偏微分方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial u}{\partial x}+cu+d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+e\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=f(x,\ t),\quad (t>0)\qquad(1.5.9)$$

满足条件

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}u(x,\ 0)=\varphi(x)\\ \dfrac{\partial u(x,\ 0)}{\partial t}=4(x)\end{array}\right\}\text{初始条件}\\ \left.\begin{array}{l}u(0,\ t)=g(t)\\ \alpha\dfrac{\partial u(l,\ t)}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial u(l,\ t)}{\partial t}=\gamma u(l,\ t)\end{array}\right\}\text{边界条件}\end{array}\right.$$

(1.5.10)

(1.5.11)

的解 $u=u(x,\ t)$。其中 a、b、c、d、e，α、β、γ、l 都是已知常数，$f(x,\ t)$、$\varphi(x)$、$\psi(x)$、$g(t)$ 都是已知函数。

解 对方程（1.5.9）取拉普拉斯变换，这时先将方程中的 x 看作参数，变换是对另一个变量 t 取的。设 $\mathscr{L}\{u(x,\ t)\}=U(x,\ p)$，利用初始条件及允许积分号下求导，可得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=\frac{d}{dx}U(x,\ p)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=\frac{d^2}{dx^2}U(x,\ p)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=pU(x,\ p)-\varphi(x)$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}=p^2U(x,\ p)-p\varphi(x)-\psi(x)$$

由此方程（1.5.9）经变换后，得到一个二阶常系数线性常微分方程

$$a\frac{d^2U}{dx^2}+b\frac{dU}{dx}+(dp^2+ep+c)U$$
$$=F(x,\ p)+(dp+e)\varphi(x)+d\psi(x) \quad (1.5.12)$$

其中 p 看作常量，$F(x,\ p)=\mathscr{L}\{f(x,t)\}$，$U=U(x,p)$。它的求解条件由原来给的边界条件（1.5.11）取拉普拉斯变换得到，为

$$\begin{cases} \mathscr{L}\{u(0,\ t)\}=U(0,\ p)=\mathscr{L}\{g(t)\}=G(p) \\ \left[\alpha\dfrac{dU}{dx}+\beta(pU-\varphi(x))\right]\Bigg|_{x=l}=\gamma U|_{x=l} \end{cases} \tag{1.5.13}$$

在求出方程（1.5.12）的解后，取逆

$$u(x,\ t)=\mathscr{L}^{-1}\{U(x,\ p)\}$$

便得原方程（1.5.9）的解。注意，常微分方程（1.5.12）的求解条件（1.5.13）是边界条件——未知函数U在$x=0$及$x=l$处满足的条件；这种条件与高等数学讲微分方程时所给的初始条件$y_0=y(t_0)$、$y_1=y'(t_0)$不同。

（三）解其他方程

〔**例 6**〕 未知函数在积分号下出现的方程，称作**积分方程**。试解积分方程

$$y(t)=t+\int_0^t y(u)\sin(t-u)du。$$

解 注意方程中的积分就是卷积$y(t)*\sin t$。对方程取拉普拉斯变换，由卷积定理得

$$\mathscr{L}\{y(t)\}=\mathscr{L}\{t\}+\mathscr{L}\{y(t)\}\cdot\mathscr{L}\{\sin t\}$$

即

$$\mathscr{L}\{y(t)\}=\frac{1}{p^2}+\mathscr{L}\{y(t)\}\frac{1}{1+p^2}$$

解出

$$\mathscr{L}\{y(t)\}=\frac{1}{p^2}\Big/\left(1-\frac{1}{1+p^2}\right)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}$$

于是

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}\right\}=t+\frac{t^3}{6}$$

解完。

用同样方法可以解更一般的积分方程

$$y(t)=g(t)+\int_0^t y(u)r(t-u)du$$

其中$g(t)$、$r(t)$为已知。

更一般地，用同样方法可以解微分积分方程

$$ay(t)+by'(t)=g(t)+\int_0^t y(u)r(t-u)du$$

其中 a、b、$g(t)$、$r(t)$、$y(0)$ 均为已知。

下面的方程类型在电路分析中经常遇到，如本节（一）中的例2。

〔例7〕 解方程

$$y'+3y+2\int_0^t ydt=f(t),\ y(0)=1 \quad (1.5.14)$$

其中 $f(t)$ 为图 1-30 所示的锯齿波。

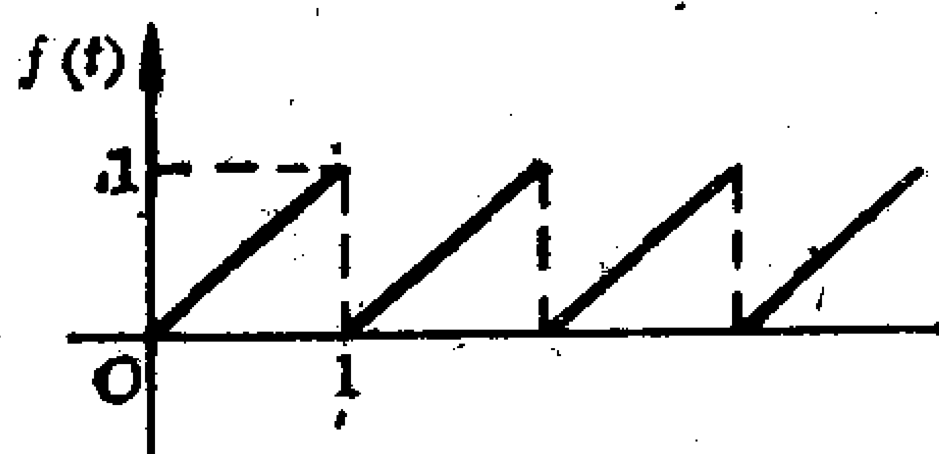


图 1-30

分析 若方程（1.5.14）中 $f(t)$ 为一初等函数，那么对方程两边求导，得

$$y''+3y'+2y=f'(t) \quad (1.5.15)$$

再将原已知的初始条件 $y(0)=1$ 代入（1.5.14），可得

$$y'(0)=f(0)-3$$

于是我们解方程(1.5.14)的问题，便转变成求二阶常系数常微分方程（1.5.15）满足初始条件 $y(0)=1$、$y'(0)=f(0)-3$ 的特解问题。但本例中 $f(t)$ 不是初等函数，其导数在无穷多个点上不存在，不能使用这种方法。

解 由周期函数的像函数公式（1.2.20）计算出

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-p}}\int_0^1 te^{-pt}dt=\frac{1}{1-e^{-p}}\left[\frac{e^{-pt}}{p^2}(-pt-1)\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{p^2(1-e^{-p})}[1-(1+p)e^{-p}]$$

$$=\frac{1}{p^2(1-e^{-p})}[(1+p)-(1+p)e^{-p}-p]$$

$$=\frac{1}{p^2(1-e^{-p})}[(1+p)(1-e^{-p})-p]$$

$$=\frac{1+p}{p^2}-\frac{1}{p(1-e^{-p})}$$

于是对方程（1.5.14）取拉普拉斯变换，利用§1.2性质(四)(即(1.2.12)式)，得

$$(pY(p)-1)+3Y(p)+\frac{2}{p}Y(p)=\frac{1+p}{p^2}-\frac{1}{p(1-e^{-p})}$$

解出$Y(p)$

$$Y(p)=\frac{p^2+p+1}{p(p+1)(p+2)}-\frac{1}{(p+1)(p+2)(1-e^{-p})} \tag{1.5.16}$$

上式右端第一项，化成部分分式后再求逆便得到

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+p+1}{p(p+1)(p+2)}\right\}=\frac{1}{2}u(t)-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}$$

(1.5.16) 式右端第二项分解后再利用§1.2例8的结果(1.2.18)式，便有

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(p+1)(p+2)(1-e^{-p})}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)(1-e^{-p})}-\frac{1}{(p+1)(1-e^{-p})}\right\}$$

$$=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)(1-e^{-p})}\right\}-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(1-e^{-p})}\right\}$$

$$=\left(\frac{e^{-2\tau(t)}}{e^2-1}-\frac{e^{-2t}}{e^2-1}\right)-\left(\frac{e^{-\tau(t)}}{e-1}-\frac{e^{-t}}{e-1}\right)$$

$$=\left(\frac{e^{-2\tau(t)}}{e^2-1}-\frac{e^{-\tau(t)}}{e-1}\right)-\left(\frac{e^{-2t}}{e^2-1}-\frac{e^{-t}}{e-1}\right)$$

其中$\tau(t)$是一周期为1的锯齿波：

$$\tau(t)=t-(n+1)\qquad (\text{当}\ n<t<n+1\ \text{时},\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

所以由（1.5.16）式可得

$$y=\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}u(t)+\frac{e^{-2\tau(t)}}{e^2-1}-\frac{e^{-\tau(t)}}{e-1}\right)+\left(-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right.$$

$$\left.-\frac{e^{-2t}}{e^2-1}+\frac{1}{e-1}e^{-t}\right)=\left(\frac{1}{2}u(t)+\frac{e^{-2\tau(t)}}{e^2-1}\right.$$

$$-\frac{e^{-\tau(t)}}{e-1}\Bigg)+\left(-\frac{e-2}{e-1}e^{-t}+\frac{3e^2-5}{2(e^2-1)}e^{-2t}\right)\quad(1.5.17)$$

若令其中

$$y_1=\frac{1}{2}u(t)+\frac{e^{-2\tau(t)}}{e^2-1}-\frac{e^{-\tau(t)}}{e-1}$$

$$y_2=-\frac{e-2}{e-1}e^{-t}+\frac{3e^2-5}{2(e^2-1)}e^{-2t}$$

则方程的解分解成为 y_1 与 y_2 两部分之和

$$y=y_1+y_2$$

其中 y_2 的曲线如图 1-31 之（a）所示；当 $t\to+\infty$时，$y_2\to0$。这个项仅在一段时间内起作用，当时间足够长之后，它逐渐衰减到零，因此在工程技术中称它为**暂态解**。而 y_1 是一个周期为1的函数；由于当 t 充分大时，y_1成为解 y 的起决定作用的部分，这时 y 几乎就是用 y_1 来描述的，因此在工程技术中称y_1为**稳态解**。

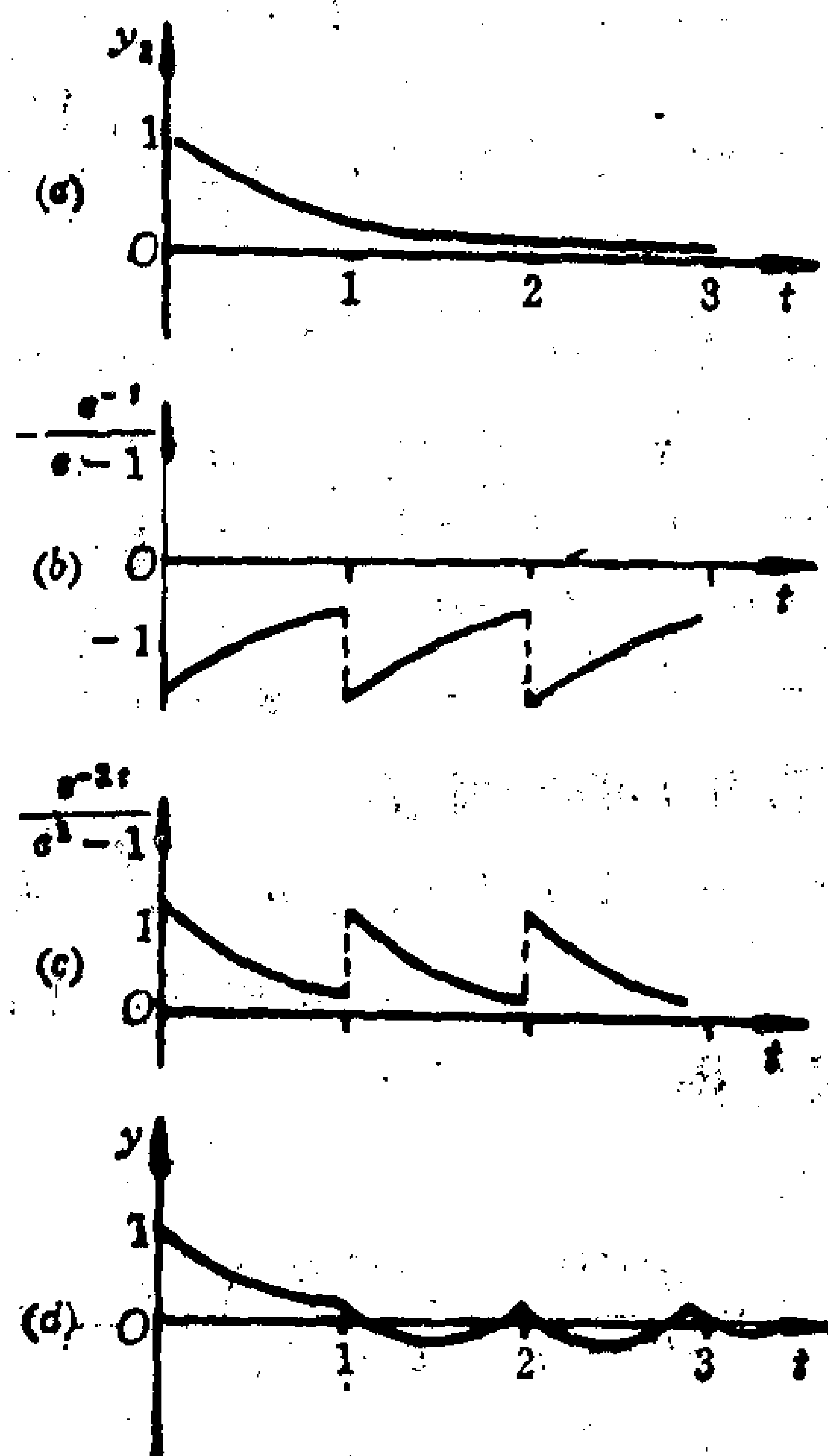


图 1-31

解y由瞬态解与稳态解相叠加而成，其图形由图1-31之（d）给出。

〔例8〕 求差分方程

$$y(t)-ay(t-h)=g(t)$$

满足边界条件$y(t)=0$（$t<0$时）的解。其中a、h、$g(t)$均为已知，且$h>0$；当$t<0$时$g(t)=0$。

解 对方程取拉普拉斯变换，利用时间迟缓定理（公式(1.2.17)），得

$$Y(p)-ae^{-hp}Y(p)=G(p)$$

解出$Y(p)$并展成级数成为

$$Y(p)=G(p)\frac{1}{1-ae^{-hp}}=G(p)\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}e^{-khp}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}e^{-khp}G(p)^{❶}$$

于是

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\}=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}\mathscr{L}^{-1}\{e^{-khp}G(p)\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^{k}g(t-kh)u(t-kh) \qquad (1.5.18)$$

解完。

分析上述解可知：当$t<0$时，因和式中每一项均为0，故$y(t)=0$，与边界条件相符。当$t>0$时，对每一固定的t，总存在非负整数m，使$mh\leqslant t<(m+1)h$；此时在解(1.5.18)式当中，当指标数$k\geqslant m+1$时，和式中的对应项由于$t-kh<0$而都为0，所以(1.5.18)式成为有限和式：

---

❶ 这里分式$1/(1-ae^{-hp})$能展开成等比级数的条件是$|ae^{-hp}|<1$，这是容易满足的，只要$\mathrm{Re}(p)$足够大。又：本题原方程中的$y(t-h)$实际上就是$y(t-h)u(t-h)$，所以$\mathscr{L}\{y(t-h)\}=\mathscr{L}\{y(t-h)u(t-h)\}=e^{-hp}\mathscr{L}\{y(t)\}=e^{-hp}Y(p)$

$$y(t)=\sum_{k=0}^{m} a^k g(t-kh)u(t-kh)$$

$$(mh\leqslant t<(m+1)h)$$

〔例 9〕 求微分差分方程

$$\frac{d}{dt}x(t)=bx(t-1)\quad(b>0)$$

满足条件：当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时 $x=1$ 的解。这问题可理解为一个实际问题：一运动物体 t 时的速度与该物体在单位时间之前的位移成正比，其比例常数为 b。又知在时间间隔 $0\leqslant t\leqslant 1$ 内，该物体停在点 $x=1$ 上。试求运动方程 $x(t)$。

解 对原方程取拉普拉斯变换，注意 $x(0)=1$，得

$$pX(p)-1=be^{-p}X(p)$$

解出 $X(p)$ 并展成级数

$$X(p)=\frac{1}{p-be^{-p}}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\frac{b}{p}e^{-p}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b^k}{p^{k+1}}e^{-kp}$$

于是

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(p)\}=\sum_{k=0}^{\infty}b^k\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-kp}}{p^{k+1}}\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}b^k\frac{(t-k)^k}{k!}u(t-k)$$

容易验证所求解的正确性。仿上例分析可知，对每个确定的 t 来说，用来表示 $x(t)$ 的无穷级数实际上只有有限项，为

$$x(t)=\sum_{k=0}^{m}b^k\frac{(t-k)^k}{k!}u(t-k)\quad m\leqslant t<(m+1)$$

解完。

更一般地，实用中常见的常系数线性微分差分方程是

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t)+\sum_{l=0}^{s}\sum_{k=0}^{n-1}a_{kl}\frac{d^k}{dt^k}x(t-\tau_l)=f(t)$$

(1.5.19)

其中 a_{kl} 及 τ_l 都是常数，且 $0\leqslant\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_s$。控制论中许多带迟滞过程的问题，都是用这类方程描述的。若方程有全零初始条件 $x^{(k)}(0)=0$，$k=0$，1，…，$n-1$，对方程(1.5.19)取拉普拉斯变换，可得

$$\left(p^n+\sum_{l=0}^{s}\sum_{k=0}^{n-1}a_{kl}p^k e^{-p\tau_l}\right)X(p)=F(p)$$

解出$X(p)$ 然后再求其逆，便得原方程解。

§1.6 单位脉冲函数

在物理中，除了连续分布的量外，还有集中于一点或一瞬时的量，如冲力、脉冲电压、点电荷、质点的质量等。只有引入一个函数来表示它们的分布密度，才有可能把这种集中的量与连续分布的量来统一处理。单位脉冲函数 $\delta(t)$，又叫狄拉克(Dirac)函数或 δ 函数，便是用来描述这种集中量的分布密度函数；它是一种"伪函数"，不能用通常函数概念，也即不能用"自变量与因变量的对应关系"去理解它。

（一）质量集中分布的无穷长细杆的线密度

考虑 t 轴上无穷长的细杆，杆上除在点 $t=0$ 上有质量 $m=1$ 之外，处处没有质量分布。设其在点 t 上的线密度为 $\delta(t)$。分析可知，这个线密度函数 $\delta(t)$ 有下列性质：

1. $t\neq0$ 时，$\delta(t)=0$（因除点 $t=0$ 外，处处没有质量分布）。

2. 当区间 I 含有点 $t=0$ 时，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{I}\delta(t)dt=1$（因线密度的积分是质量）。

3. 当区间 I 不含点 $t=0$ 时，积分 $\int_I \delta(t)dt=0$。

4. $t=0$ 时，$\delta(t)=\infty$(因在点 $t=0$ 有集中的质量)。

性质 4 说明了为什么我们不能用通常函数表示法去表示函数 $\delta(t)$。分析以上诸性质可知，性质 3 可由性质 1 导出，性质 4 可由性质 1 和 2 导出；所以说，性质 3 、4 是派生的，而性质 1 和 2 是本质的。

我们若除去函数 $\delta(t)$ 所代表的物理意义，经过数学抽象，便可引出 δ 函数的数学概念。

(二) δ函数的定义

满足下列两个条件的函数：

1. $\delta(t)=0$ （当 $t\neq 0$ 时)。

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$ 或 $\int_I \delta(t)dt=1$ （其中 I 是含有点 $t=0$ 的任何一个区间)，定义为 $\delta(t)$ 函数，也称为单位脉冲函数 $\delta(t)$。

更一般情况下，满足下列两个条件的函数：

1. $\delta(t-a)=0$ （当 $t\neq a$ 时)。

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=1$ 或 $\int_I \delta(t-a)dt=1$ (其中 I 是含有点 $t=a$ 的任何一个区间)，我们定义为 $\delta(t-a)$ 函数，也称为单位脉冲函数 $\delta(t-a)$。

在现实生活中这种函数并不存在，它只是具有下列性质的函数的数学抽象：这函数在某定点（$t=0$ 或 $t=a$）的非常狭小的邻域内取非常大的值；在该邻域之外，函数值处处为零。且这函数在该邻域内的精确性质是无关紧要的，只要这函数振动不太显著并且积分值为 1 。据此，图1-32、图1-33、图1-34中粗线所表示函数都可以作为函数 $\delta(t-a)$ 的近似表示（当 $0<h\ll 1$ 时)；并且可以认为，当 $h\to 0^+$ 时，这些函数的极限就是 $\delta(t-a)$。

函数 $\delta(t-a)$ 的图形，按通常意义是无法绘制的；图1-35

中的粗线是工程上表示函数$\delta(t-a)$的一种方法。

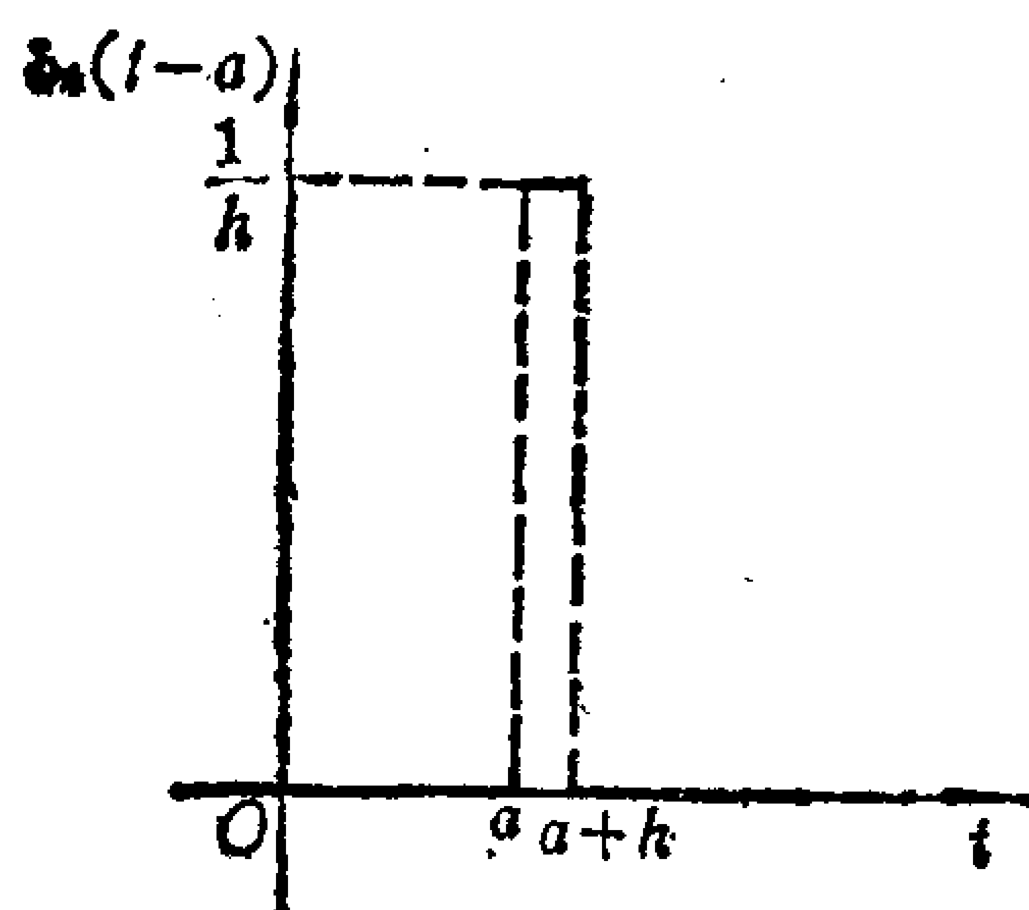


图 1-32

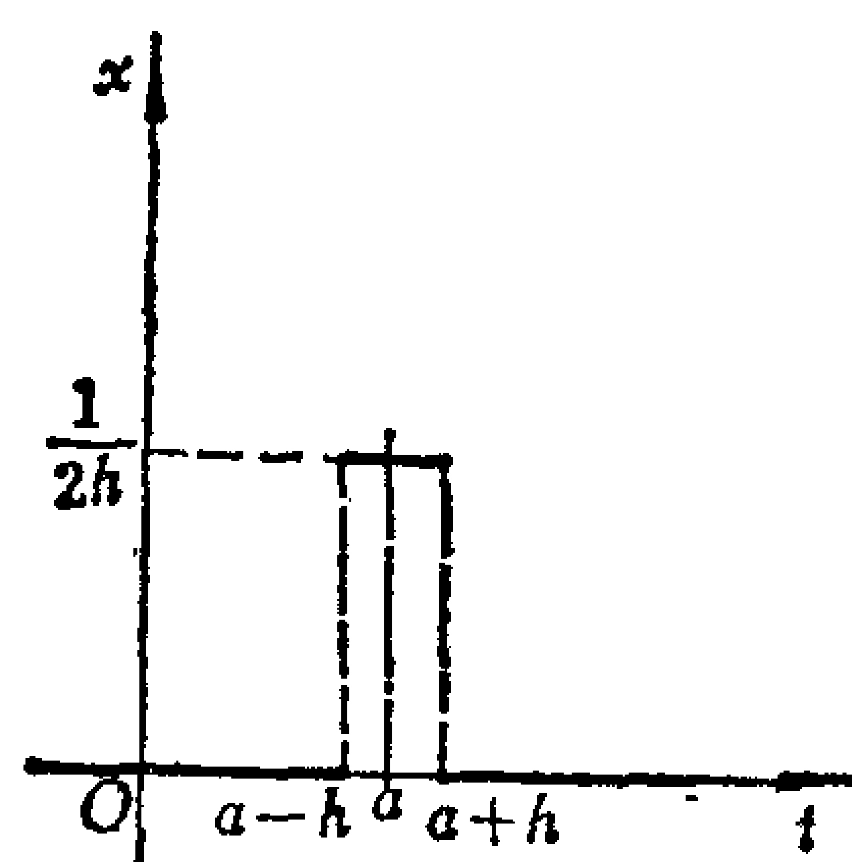


图 1-33

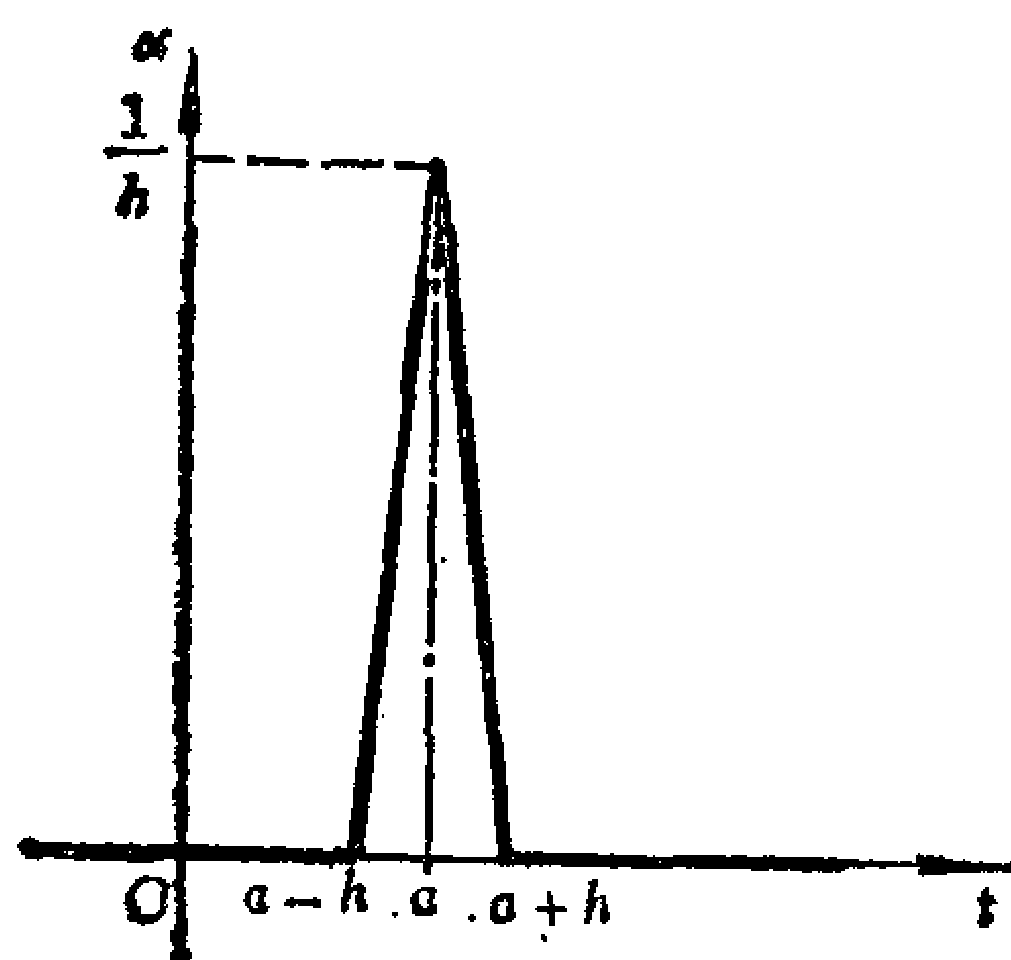


图 1-34

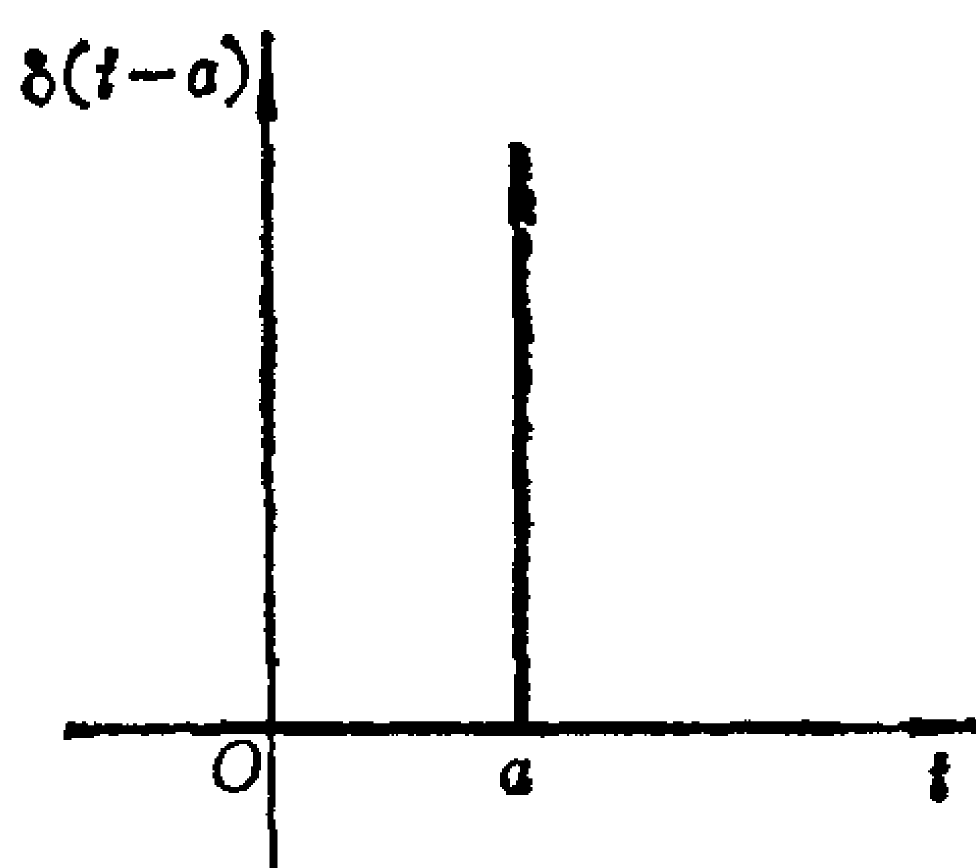


图 1-35

除图1-32、图1-33、图1-34之外，我们还可以造出许多其他逼近函数$\delta(t-a)$的函数族，但在实际计算中一般并不需要这些具体的函数族，只要用图1-32所示的脉冲函数族：

$$\delta_h(t-a)=\frac{1}{h}[u(t-a)-u(t-a-h)]$$

$$=\begin{cases}1/h, & a<t<a+h\\ 0, & t<a,\quad t>a+h\end{cases}\tag{1.6.1}$$

即可。

请注意，在本书我们规定：

(A) 单位脉冲函数$\delta(t-a)$是脉动函数$\delta_h(t-a)$的极限：

$$\lim_{h\to 0^+} \delta_h(t-a)=\delta(t-a) \qquad (1.6.2)$$

（B）单位脉冲函数原定义中$\delta(t-a)$的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt$$

应理解为$\delta_h(t-a)$的积分的极限：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=\lim_{h\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(t-a)dt \qquad (1.6.3)$$

只有这样，我们才给了在原定义当中无法按通常的积分概念去理解的积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt$以明确的含意。

由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(t-a)dt=\int_{a}^{a+h}\frac{1}{h}dt=1\to 1 \quad （当 h\to 0^+时）$$

所以按（1.6.3）式便有原定义当中的2.式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=1$$

在特殊情况下，$a=0$时有：

$$\delta_h(t)=\frac{1}{h}[u(t)-u(t-h)]$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{h}, & 0<t<h\\ 0, & t<0,\ t>h\end{cases}$$

单位脉冲函数$\delta(t)$及其积分的含意便依次是

$$\delta(t)=\lim_{h\to 0^+}\delta_h(t)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_h(t)dt=\lim_{h\to 0^+}\int_{0}^{h}\frac{1}{h}dt=\lim_{h\to 0^+}1=1$$

（图1-36中，左图是$\delta_h(t)$的图形，右图是在工程上表示$\delta(t)$的一种方法）。

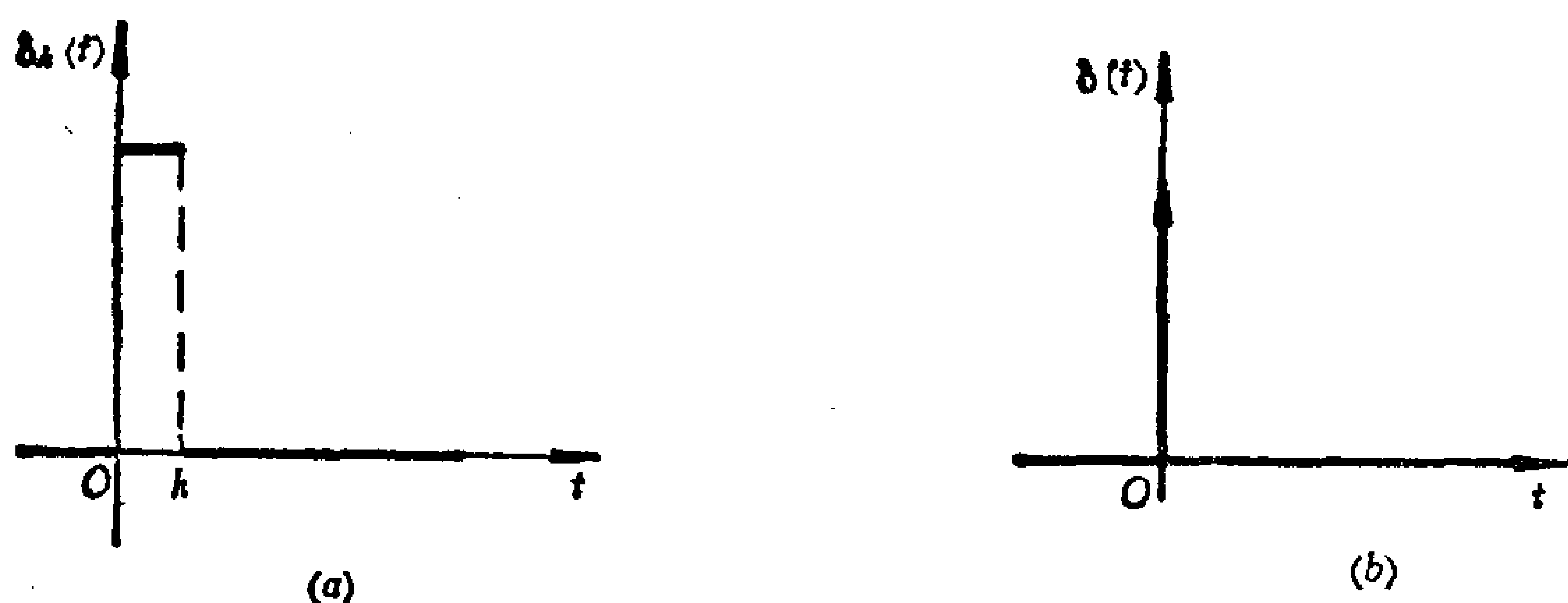


图 1-36

（三）δ函数的其他物理意义

单位冲力 设 t 为时间，$F(t)$ 为力，$a(t)$ 为加速度，$v(t)$ 为速度。由牛顿第二定律 $F(t)=ma(t)=m\frac{d}{dt}\cdot v(t)$ 知

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt=m[v(t_1)-v(t_0)]$$

就是动量定律。它表明力 $F(t)$ 对时间的积分（冲量），等于质量为 m 的物体的动量 mv 的增量。

当力 $F(t)=\delta(t)$ 时，条件1表示在 $t\neq 0$ 的所有时刻，该力为零，所以该力是仅在 $t=0$ 时刻的瞬时力。条件2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=m[v(0^+)-v(0^-)]=1$ 表示该力的冲量是1。这个力使质量为 m 的物体在 $t=0$ 这一瞬时，动量 mv 增加了一个单位；使速度突然增加 $1/m$ 个单位。或者说，这个力使单位质量（$m=1$）的速度突然增加了一个单位。若单位质量的物体原先是静止的〔$v(0^-)=0$〕，则在力 $\delta(t)$ 作用下，速度突然增加到 $v(0^+)=1$。

单位脉冲电流 设 t 为时间，$q(t)$ 为一段导线上的电量，$i(t)$ 为电流强度，由 $q'(t)=i(t)$ 知

在时间 (t_0, t_1)内流过导线的电量$=\int_{t_0}^{t_1} i(t)dt = q(t_1) - q(t_0)$

当 $i(t)=\delta(t)$ 时，条件1表示，该电流是 $t=0$ 时的瞬时电流。条件2

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=q(0^+)-q(0^-)=1$$

说明这瞬时电流的强度极大，它使这段导线上的电量 q 在 $t=0$ 这一瞬时，突然增加一个单位。

为方便计，今将δ函数常见的几种物理意义列表于下：

讨论范围	设自变量大的物理意义	设函数 $f(t)$ 的物理意义	则函数 $\delta(t)$ 的物理意义
物理学	细杆上各点的坐标	细杆的线密度	只在 $t=0$ 点处有质量 $m=1$，而在其他各点均没有质量的细杆的线密度
力学	时间	变力	单位冲力
电学	时间	电流强度	单位脉冲电流

（四）δ函数的性质

性质1 对于任何一个在点 a 的某个邻域内连续的函数 $f(t)$，都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt=f(a) \tag{1.6.4}$$

特别，当 $a=0$ 时，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt=f(0) \tag{1.6.5}$$

证明

我们证明（1.6.4）式。注意其中被积函数也是一广义函数，其积分显然也不能用通常积分的含义去理解。类似(二) 中的规定（B），把 $f(t)\delta(t-a)$ 的积分理解为普通函数 $f(t)\cdot\delta_\varepsilon(t-a)$ 的积分的极限，再对后者利用积分中值定理，便能

证得欲证的结果了。事实上：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt=\lim_{h\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta_h(t-a)dt$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\int_a^{a+h} f(t)\frac{1}{h}dt=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h} f(a+\theta h)h=\lim_{h\to 0^+} f(a+\theta h)=f(a)$$

$(0<\theta<1)$

证完。

假若我们注意到 $f(t)\delta(t-a)$ 有性质

$$f(t)\delta(t-a)=\begin{cases}0, & (t\neq a)\\ f(a)\delta(0), & (t=a)\end{cases}$$
$$=f(a)\delta(t-a)$$

则从形式上的推演也可以得到（1.6.4）式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-a)dt=\int_{-\infty}^{+\infty} f(a)\delta(t-a)dt$$

$$=f(a)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-a)dt=f(a)$$

在实用上，也有把（1.6.4）式作为运算性质来定义δ函数的（参看郭敦仁编著《数学物理方法》）。

性质 2 对函数 $\delta(t-a)$，它的拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\}=e^{-pa}(a\geqslant 0) \tag{1.6.6}$$

特别，当 $a=0$ 时，则

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\}=1 \tag{1.6.7}$$

这表明：1 的拉普拉斯逆变换为单位脉冲函数 $\delta(t)$ $\left(\text{过去我们已经知道 1 的拉普拉斯变换为}\frac{1}{p}\right)$。

证明 由拉普拉斯变换以及 $\delta(t-a)$ 的定义与公式

(1.6.4)，得

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\}=\int_{0}^{+\infty}\delta(t-a)e^{-pt}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)e^{-pt}dt=e^{-pt}\big|_{t=a}=e^{-pa}$$

证完。

性质3 单位阶跃函数 $u(t)$ 的导数是δ函数，即

$$\frac{d}{dt}u(t)=\delta(t) \qquad (1.6.8)$$

一般地，有

$$\frac{d}{dt}u(t-a)=\delta(t-a) \quad (a\geqslant 0) \qquad (1.6.9)$$

证明 因由定义知：当 $t\neq a$ 时 $\delta(t-a)=0$，且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=1$$

所以

$$\int_{-\infty}^{t}\delta(t-a)dt=\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-a)dt=1, & (t>a\text{时})\\ 0, & (t<a\text{时})\end{cases}$$

$$=u(t-a)$$

两边对 t 求导，便得

$$\delta(t-a)=\frac{d}{dt}u(t-a)$$

这便是（1.6.9）式。证完。

***(五)$\delta'(t)$的定义与其拉普拉斯变换**

既然δ函数不是正常函数，那么也就不能按照正常函数的导数定义方法去定义δ函数的导数。事实上，$\frac{d}{dt}\delta(t)$**定义为**：对任意的有连续导数的函数 $f(t)$，都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right]f(t)dt=-f'(0) \qquad (1.6.10)$$

这个定义合理不合理呢？假若我们把δ函数及其导数都看作是普通函数时，则从形式上的演算也可得到（1.6.10）式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{d}{dt}\delta(t)\right]f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)d\delta(t)$$

$$=f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f'(t)dt$$

$$=0-0-\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f'(0)dt=-f'(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)$$

$$=-f'(0)$$

根据定义（1.6.10）式并注意当 $t<0$ 时 $\frac{d}{dt}\delta(t)=0$（因 $t<0$ 时 $\delta(t)=0$），可得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}\delta(t)\right\}=\int_{0}^{+\infty}\frac{d}{dt}\delta(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dt}\delta(t)$$

$$\cdot e^{-pt}dt=-\left(\frac{d}{dt}e^{-pt}\right)\Big|_{t=0}=p$$

于是便有

公式

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}\delta(t)\right\}=p \qquad (1.6.11)$$

相类似，$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$ **被定义为**：对任意的有连续 n 阶导数的函数 $f(t)$，都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\cdot f(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0) \qquad (1.6.12)$$

据此定义可得

公式

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right\}=p^n \quad (n=1,2,3,\cdots) \qquad (1.6.13)$$

事实上，根据定义（1.6.12）式并注意当 $t<0$ 时 $\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)=0$（因 $t<0$ 时 $\delta(t)=0$），可得

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right\}=\int_0^{+\infty}\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)$$

$$\cdot\ e^{-pt}dt=(-1)^n\left(\frac{d^n}{dt^n}e^{-pt}\right)\bigg|_{t=0}=p^n$$

这便是公式（1.6.13）。

（六）应用举例

〔**例 1**〕 一电路如图 1-37 所示，其中电源在 $t=0$ 时输入一脉冲电压 $V_0\delta(t)$，试求电流 i 的表达式。

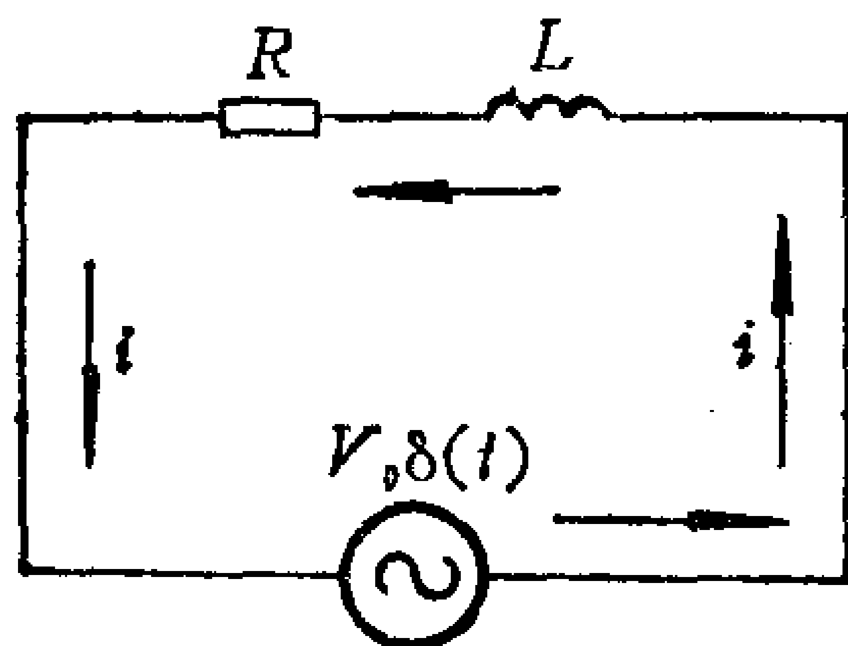


图 1-37

解 由基尔霍夫第一定律建立微分方程

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V_0\delta(t)$$

初始条件为 $i(0)=0$。取拉普拉斯变换得

$$LpI(p)+RI(p)=V_0$$

解出

$$I(p)=\frac{V_0}{L[p+(R/L)]}$$

于是

$$i(t)=\mathscr{L}^{-1}\{I(p)\}=\frac{V_0}{L}e^{-Rt/L}$$

〔**例 2**〕 求 $G(p)=\dfrac{p^3+5p^2+9p+7}{(p+1)(p+2)}$ 的像原函数。

解 $G(p)=p+2+\dfrac{p+3}{(p+1)(p+2)}$

$$=p+2+\frac{2}{p+1}+\frac{-1}{p+2}$$

由公式（1.6.11）和（1.6.7），得

$$\mathscr{L}^{-1}\{G(p)\}=\mathscr{L}^{-1}\{p\}+2\mathscr{L}^{-1}\{1\}+2\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\}$$

$$-\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}=\frac{d}{dt}\delta(t)+2\delta(t)$$

$$+2e^{-t}-e^{-2t}$$

〔例3〕 如图1-38所示跨度为l的简支梁，在$x=a$（$0<a<l$）处受一集中载荷F的作用，试求该梁的挠度曲线。

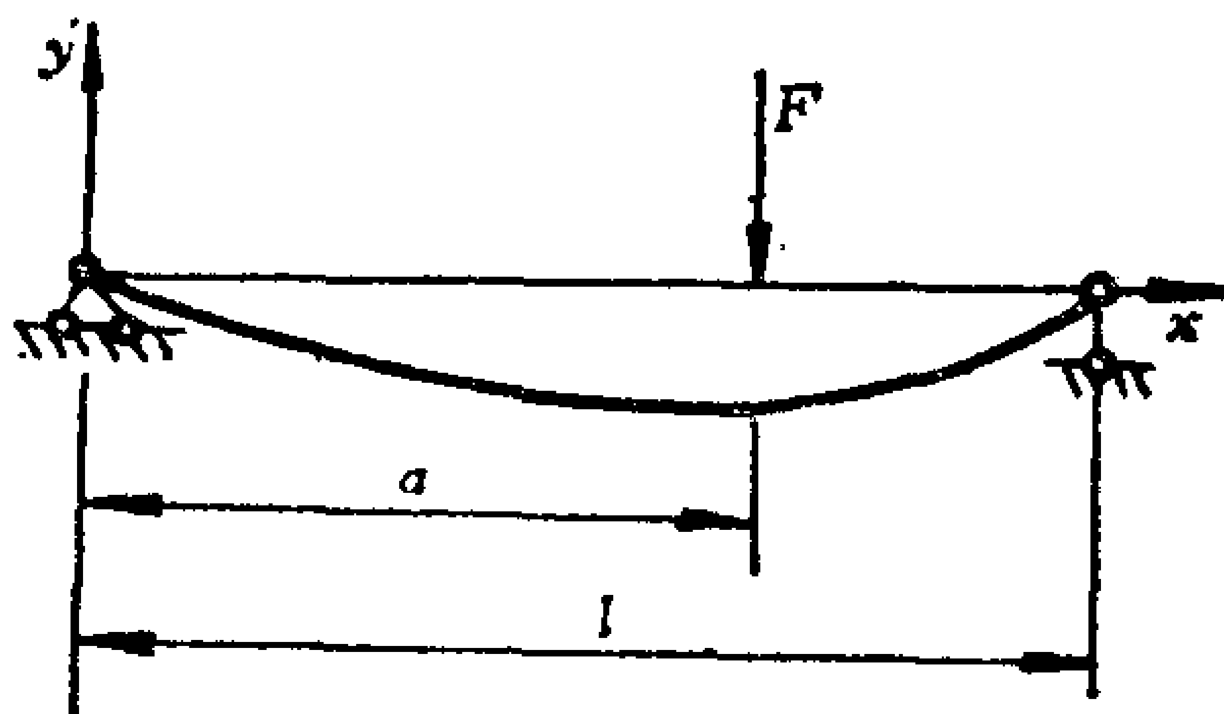


图 1-38

解 由材料力学知，挠度曲线$y=y(x)$应满足的方程及边界条件为

$$\begin{cases} EJy^{(4)}=-F\delta(x-a) \\ y(0)=y''(0)=y(l)=y''(l)=0 \end{cases}$$

对微分方程取拉普拉斯变换，利用条件$y(0)=y''(0)$，得

$$EJ[p^4Y(p)-y'(0)p^2-y'''(0)]=-Fe^{-ap}$$

于是

$$Y(p)=-\frac{F}{EJ}\cdot\frac{e^{-ap}}{p^4}+\frac{y'(0)}{p^2}+\frac{y'''(0)}{p^4}$$

求逆得

$$y(x)=-\frac{F}{EJ}\cdot\frac{(x-a)^3}{3!}u(x-a)+y'(0)x$$

$$+\frac{y'''(0)}{3!}x^3 \qquad (1.6.14)$$

再将边界条件$y(l)=y''(l)=0$，分别代入（1.6.14）式及

(1.6.14) 式的两次导数式，便可求得

$$y'(0)=-\frac{F(l-a)}{6EJl}(2al-a^2),\quad y''(0)=\frac{F(l-a)}{EJl}$$

从而得解

$$y(x)=-\frac{F}{6EJl}[l(x-a)^3u(x-a)$$

$$+(l-a)(2al-a^2+x^2)x]$$

$$=\begin{cases}-\frac{F}{6EJl}(l-a)(2al-a^2+x^2)x & (0\leqslant x\leqslant a)\\ -\frac{F}{6EJl}[(2l-a)x^3-3alx^2+(2al^2+a^3)x-la^3] & (a<x\leqslant l)\end{cases}$$

解完。

（七）关于拉普拉斯变换的积分下限

对在 $t=0$ 邻近有界的函数 $f(t)$ 来说（例如满足定理1.1条件的函数以及§1.1～§1.5中见过的全部函数），$f(0)$ 取什么值，与讨论 $f(t)$ 的拉普拉斯变换毫无关系，因为 $f(t)$ 在一点上的值，不会影响积分

$$\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

但是，假如 $f(t)$ 在 $t=0$ 包含了脉冲函数（例如，$f(t)=3\delta(t)$ 或 $\cos t+2\delta(t)$），问题就复杂了。我们必须区分这个积分的积分区间包括了 $t=0$ 这一点，还是不包括 $t=0$ 这一点。假若包括，我们把积分下限记为 0^-；假若不包括，我们把积分下限记为 0^+，于是得出了不同的拉普拉斯变换。记

$$\mathscr{L}_+\{f(t)\}=\int_{0^+}^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt$$

$$\mathscr{L}_-\{f(t)\}=\int_{0^-}^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt \tag{1.6.15}$$

$$=\int_{0^-}^{0^+}f(t)e^{-pt}dt+\mathscr{L}_+\{f(t)\}$$

仔细地说，上述两个积分的含义分别是

$$\int_{0^+}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$$\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\varepsilon}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

对于在 $t=0$ 点不含有脉冲函数的函数 $f(t)$，此时 $t=0$ 不是无穷间断点，所以有

$$\mathscr{L}_+\{f(t)\}=\mathscr{L}_-\{f(t)\}。$$

对于在 $t=0$ 点含有脉冲函数的函数 $f(t)$，因 $\int_{0^-}^{0^+} f(t)\cdot e^{-pt}\neq 0$，由（1.6.15）式知

$$\mathscr{L}_+\{f(t)\}\neq\mathscr{L}_-\{f(t)\}$$

由此可知，此时区分 $\mathscr{L}_+$ 与 $\mathscr{L}_-$ 十分必要。

在本节(四)(五) 中所讨论的拉普拉斯变换的积分区间，实际上都包括了 $t=0$ 这一点的，所以是 $\mathscr{L}_-$。依现在的记法，公式(1.6.6)、(1.6.7)、(1.6.11)、(1.6.12) 应改写作：

$$\mathscr{L}_-\{\delta(t-a)\}=e^{-pa}(a\geqslant 0) \qquad (1.6.6)'$$

$$\mathscr{L}_-\{\delta(t)\}=1 \qquad (1.6.7)'$$

$$\mathscr{L}_-\left\{\frac{d}{dt}\delta(t)\right\}=p \qquad (1.6.11)'$$

$$\mathscr{L}_-\left\{\frac{d^n}{dt^n}\delta(t)\right\}=p^n \qquad (1.6.12)'$$

与上述式（1.6.7）′相对应，显然应该有

$$\mathscr{L}_+\{\delta(t)\}=0 \qquad (1.6.16)$$

这是因为当 $t<0$ 时，$\delta(t)\equiv 0$。

由于拉普拉斯变换的积分下限取法不同，使得导数的拉普拉斯变换公式（1.2.2）与式（1.2.3）也分别变为

$$\mathscr{L}_+\{f'(t)\}=p\mathscr{L}_+\{f(t)\}-f(0^+) \qquad (1.6.17)$$

$$\mathscr{L}_+\{f''(t)\}=p^2\mathscr{L}_+\{f(t)\}-pf(0^+)-f'(0^+) \qquad (1.6.18)$$

$$\mathscr{L}_-\{f'(t)\}=p\mathscr{L}_-\{f(t)\}-f(0^-) \qquad (1.6.19)$$

$$\mathscr{L}_-\{f''(t)\}=p^2\mathscr{L}_-\{f(t)\}-pf(0^-)-f'(0^-) \qquad (1.6.20)$$

下面我们用不同的变换$\mathscr{L}_+$与$\mathscr{L}_-$去解同一个题目。

〔例 4〕 设图 1-39 中的机械系统最初是静止的，它在单位冲力$\delta(t)$正向作用下开始运动。不计阻力，试求运动方程。

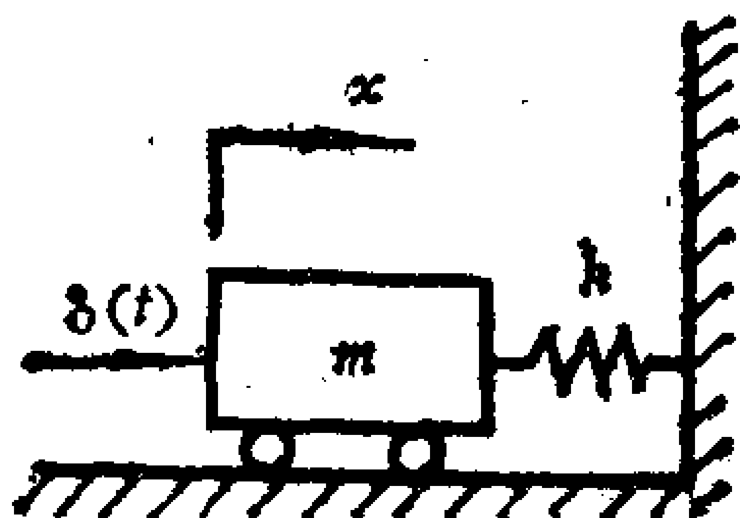


图 1-39

解法一 由牛顿第二定律得

$$mx''+kx=\delta(t) \quad t\geqslant 0 \qquad (1.6.21)$$

对方程两边取变换$\mathscr{L}_-$，并设$\mathscr{L}_-\{x(t)\}=X(p)$，利用公式 (1.6.20)、(1.6.7)′及初始条件

$$x(0^-)=x'(0^-)=0$$

得到

$$mp^2X(p)+kX(p)=1 \qquad (1.6.22)$$

解出

$$X(p)=\frac{1}{mp^2+k}=\frac{1}{\sqrt{mk}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{p^2+\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^2}$$

于是

$$x(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(p)\}=\frac{1}{\sqrt{mk}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$$

这是一个以$\frac{1}{\sqrt{mk}}$为振幅的简谐振动。

解法二 假若我们在时刻$t=0$刚过的一瞬间(记作$t=0^+$)去考虑初始条件，这时可以认为冲力$\delta(t)$已经作用过了，该力使物体初速有个突变——由 0 变到了$\frac{1}{m}$(参考本节（三）中对单位冲力的说明)，所以应有

$$x(0^+)=0,\quad x'(0^+)=\frac{1}{m}。 \qquad (1.6.23)$$

对方程(1.6.21)两边取变换$\mathscr{L}_+$，并设$\mathscr{L}_+\{x(t)\}=X(p)$，利用公式（1.6.18）、（1.6.16）及初始条件（1.6.23），得到

$$m\left[p^2X(p)-\frac{1}{m}\right]+kX(p)=0$$

它与（1.6.22）式相同。以下解法也与解法一同。解完。

在结束本节时，编者指出，这里对δ函数的有关定义及证明，都建立在高等数学基础之上。有兴趣追究严格的读者，请参考较专门的著作。

习 题 一

1. 由定义直接计算拉普拉斯变换：

(1) $\cos\omega t$

(2) $\mathrm{sh}\,\omega t$

(3) $\mathrm{ch}\,\omega t$

(4) $f(t)=\begin{cases}3, & 0\leqslant t<2\\ -1, & 2\leqslant t<4\\ 0, & t\geqslant 4\end{cases}$

(5) $f(t)=\begin{cases}t+1, & 0\leqslant t<3\\ 0, & t\geqslant 3\end{cases}$

2. 利用拉普拉斯变换的最简变换表及线性性质求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $3t^4-2t^{3/2}+6$

(2) $5\sin 2t-3\cos 2t$

(3) $3\sqrt[3]{t}+4e^{2t}$

(4) $1/t^2$

(5) $\sin t\cos t$

3. 利用最简变换表及拉普拉斯逆变换的线性性质求下列像函数的像原函数：

(1) $\dfrac{5}{p+2}$

(2) $\dfrac{4p-3}{p^2+4}$

(3) $\dfrac{2p-5}{p^2}$

(4) $\dfrac{1}{p^k}$ $(k>0)$

(5) $\dfrac{4-5p}{p^{3/2}}$

(6) $\dfrac{1}{p^2+2p}$

(7) $\dfrac{p+1}{p^2+2p}$

(8) $\dfrac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$ $(a^2\neq b^2)$

(9) $\dfrac{p+1}{p(p^2+p-6)}$

4. 利用单位阶跃函数的拉普拉斯变换公式求：

(1) $\mathscr{L}\{2u(t-1)+3u(t-2)\}$

(2) $\mathscr{L}\{tu(t-3)\}$

(3) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{e^{-5p}}{p}\right\}$

(4) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{2e^{-p}-e^{-2p}}{p}\right\}$

并分别画出像原函数的图形。

5. 已知 $f(t)=\begin{cases}\cos t, & t>\dfrac{\pi}{2}\\ 3, & t<\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

(1) 用单位阶跃函数表示 $f(t)$。

(2) 求它的拉普拉斯变换（提示：设法利用时间迟缓定理）。

6. 利用拉普拉斯变换的性质及已导出的变换公式计算：

(1) $\mathscr{L}\left\{\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right\}$

(2) $\mathscr{L}\left\{\dfrac{\sin at}{t}\right\}$

(3) $\mathscr{L}\{t\sin 2t\}$

(4) $\mathscr{L}\{t^2\sin 2t\}$

(5) $\mathscr{L}\{\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\}$

(6) $\mathscr{L}\left\{\frac{1-e^{-t}}{t}\right\}$

(7) $\mathscr{L}\{t\operatorname{sh}\omega t\}$

(8) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{7}{\sqrt{p+3}}\right\}$

(9) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2e^{-5p}}{\sqrt{p-2}}\right\}$

(10) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{a^2}{p(p+a)^2}\right\}$

(11) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}\right\}$

(12) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+3p+1}{p(p+1)^3}\right\}$

(13) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+2)(p^2+4p+8)}\right\}$

(14) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p^2+p-10}{(p+1)^2(p^2+4)}\right\}$

(15) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p^3+8p^2+26p+22}{p^3+7p^2+14p+8}\right\}$

7. 求下列周期函数的拉普拉斯变换：

(1) 周期为 2π 的半波整流正弦波函数（图 a）

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 2k\pi\leqslant t\leqslant(2k+1)\pi\\ 0, & (2k+1)\pi<t<(2k+2)\pi\end{cases}\quad(k=0,1,2,\cdots)$$

(2) 周期为 π 的全波整流正弦波函数 $f(t)=|\sin t|$（图 b）

(3) 周期为 2τ，齿高为 h 的三角冲击波函数 $h(t)$（图 c）

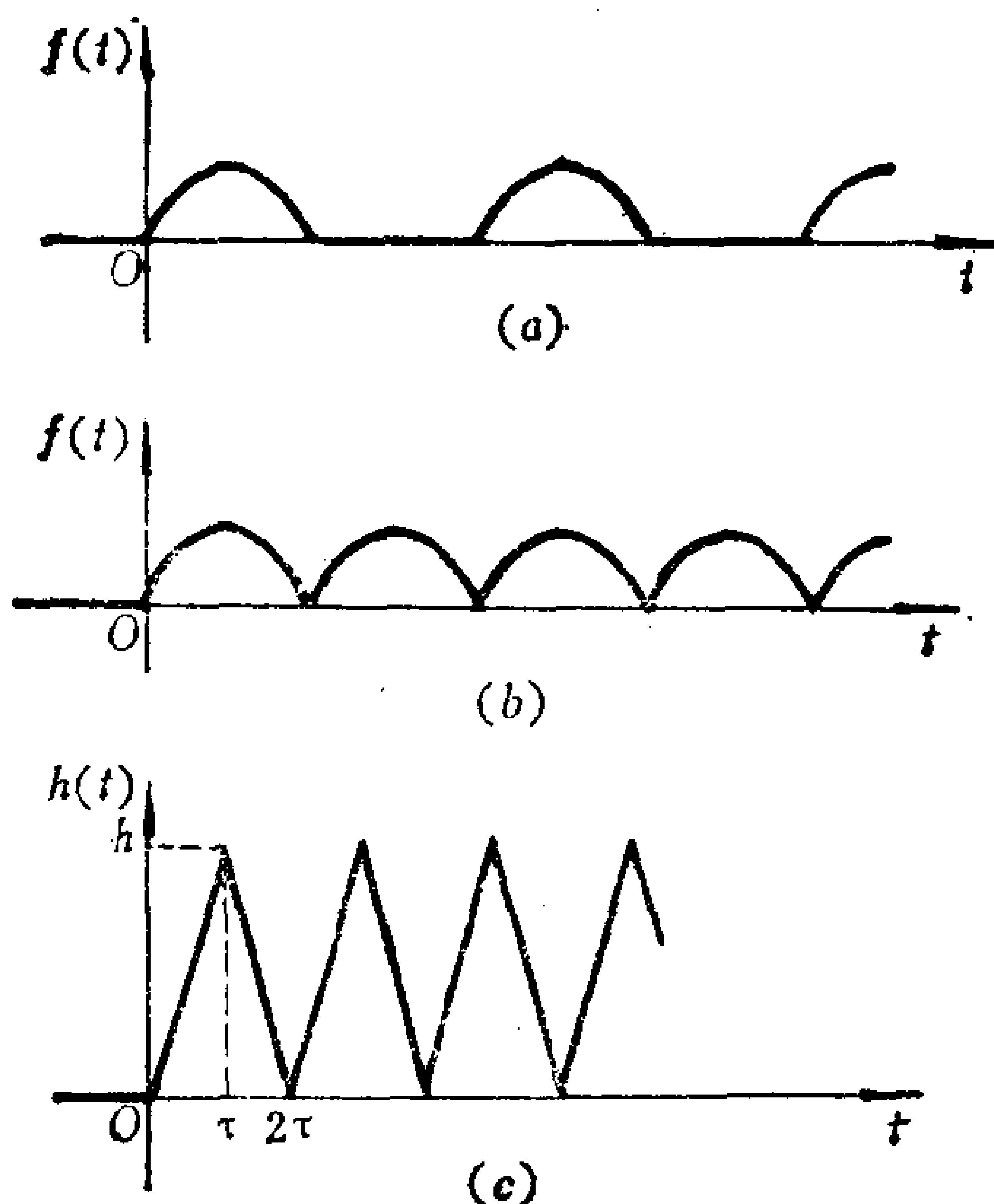
8. 求 (1) $\sin t*\sin t$；(2) $t*e^t$，并用它们验证卷积定理。

9. 试证明卷积满足结合律和对加法的分配律。

10. 试利用卷积定理证明：

(1) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+a^2)^3}\right\}=\frac{3}{8a^5}(\sin at-at\cos at)-\frac{1}{8a^3}t^2\sin at$

（提示：利用§1.4 例 3 所列的 $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p^2+a^2)^2}\right\}$ 的公式）



第7题图

(2) $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{p^2}{(p^2+a^2)^2}\right\}=\dfrac{1}{2a}(at\cos at+\sin at)$

11. 求解下列微分方程及微分方程组：

(1) $y''+k^2y=0$, $y(0)=A$, $y'(0)=B$

(2) $y''-y'-6y=2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

(3) $y'''-2y''+5y'=0$, $y(0)=y'(0)=0$, $y''(0)=1$

(4) $y''-3y'+2y=2e^{-t}$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$

(5) $x''+\omega^2x=a[u(t)-u(t-b)]$, $x(0)=x'(0)=0$

(6) $x''+4x'+5x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=2$

(7) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^3x}{dt^3}-2\dfrac{dx}{dt}-x=\delta(t)$, $x(0)=x'(0)=x''(0)$

$=x'''(0)=0$

(8) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t$, $x(0)=1$, $x'(0)=-2$, $x''(0)=$

3, $x'''(0)=0$

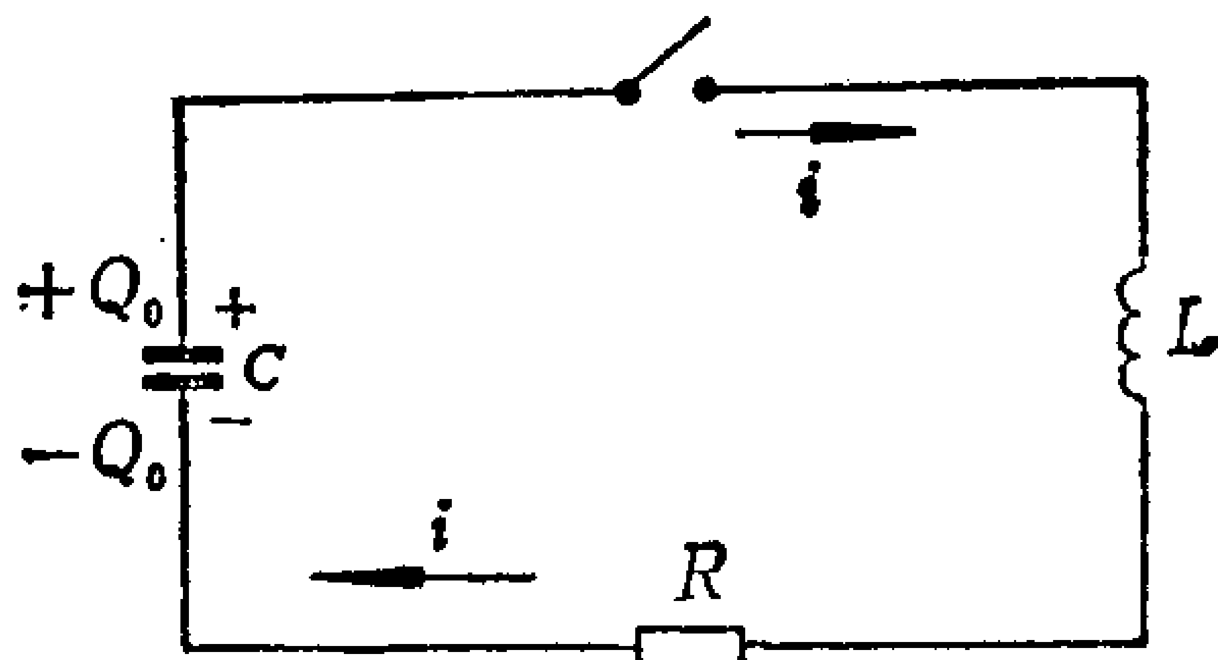
(9) $\begin{cases} x'+y'=1, & x(0)=a,\ y(0)=b \\ x'-y'=t, \end{cases}$

(10) $\begin{cases} 2x - y - y' = 4(1 - e^{-t}) \\ 2x' + y = 2(1 + 3e^{-2t}) \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$

(11) $\begin{cases} x'' - x - 2y' = e^{t} \\ x' - y'' - 2y = t^{2} \end{cases}$

求满足初始条件 $x(0) = -\dfrac{3}{2}$，$x'(0) = \dfrac{1}{2}$，$y(0) = 1$，$y'(0) = -\dfrac{1}{2}$ 的特解以及通解。

12．在如图的 RCL 电路中，R、C、L 都为已知，且 $\dfrac{R}{2L} < \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$。设合闸前，电容极板上的电量为 Q_0，而电流 $i = 0$。试推算：合闸后电容器上的电量 q 随 t 的变化规律为：



第12题图

$$q(t) = \frac{Q_0\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} e^{-\delta t} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\, t + \text{tg}^{-1} \frac{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}{\delta}\right)$$

其中：$\delta = \dfrac{R}{2L}$，$\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

13．一弹簧上端固定，下端挂了两个质量都是 m 的重物，使弹簧伸长了 $2a$，今突然取下一个重物，使弹簧从静态开始运动，求所挂重物的运动规律。

提示：设重物位移为 x，正方向向下，坐标原点选在挂一个重物时的静平衡位置。

14．解具有阻尼的自由振动运动方程，其微分方程为：$mx'' + \mu x' + cx = 0$ 其中 m、μ、c 分别为质量、阻尼系数及弹性体的刚度。

*15．设 § 2.4 中例 1 的图所示的系统最初是静止的，假定小车因一个强度为 1 的冲击力而开始运动，问：它能用另外的强度为 1 的冲击力阻止吗？试由计算得出结论。

16．解下列积分方程

(1) $y(t)=a\sin t+\int_0^t \sin(t-u)\,y(u)du$

(2) $y(t)=a\sin bt+c\int_0^t \sin b(t-u)\,y(u)du \quad (b>c>0)$

17. 求微分方程组

$$\begin{cases} y'(t)-2z'(t)=f(t) \\ y''(t)-z''(t)+z(t)=0 \end{cases}$$

满足初始条件 $y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0$ 的解，其中 $f(t)$ 为已知。

*18. 试求定解问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0<x<l,\ t>0) \\ u|_{x=0}=0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0 \\ u|_{t=0}=0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=-v_0 \end{cases}$$

(提示：原方程对 t 取拉普拉斯变换。)

补 充 选 作 题

1. 解积分微分方程

$$ay(t)+by'(t)=g(t)+\int_0^t y(u)\,r(t-u)du$$

其中常数 a、b 及函数 $g(t)$、$r(t)$ 均为已知。

2. 求下列函数的拉普拉斯变换：

(1) $f(t)=e^{-kt}\text{ch}at$ (2) $f(t)=t\cdot\text{sh}at$

(3) $f(t)=t\cdot e^{-at}\cdot\sin bt$ (4) $f(t)=(t-a)\cdot u(t-b)$.

其中 a、b、k 均为常数。

3. 已知 $f(t)$ 是周期为 1 的函数，在一个周期内，它是由下列关系来定义：

$$f(t)=t-t^2,\quad 0<t<1$$

求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换。

4. 证明：

(1) $\mathscr{L}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}=\dfrac{1}{\sqrt{p}}$ $\left(注：\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$

（2）$\mathscr{L}\{e^{t}\cdot\text{erf}(\sqrt{t})\}=\dfrac{1}{\sqrt{p}\,(p-1)}$

$\left(\text{注：}\ \text{erf}(\sqrt{t})=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{t}}e^{-x^2}dx\right)$

（3）$\mathscr{L}\{e^{t}\cdot\text{erfc}(\sqrt{t})\}=\dfrac{1}{p+\sqrt{p}}$

（注：$\text{erfc}(\sqrt{t})=1-\text{erf}(\sqrt{t})$。提示：利用（2））

5．求下列函数的逆拉普拉斯变换：

（1）$F(p)=\dfrac{1}{p(p+a)(p+b)}$（$a$、$b$ 均为常数）

（2）$F(p)=\dfrac{4p+1}{(p^2+p)(4p^2-1)}$

（3）$F(p)=\dfrac{p+3}{(2p-1)(p^2+2p+2)}$

（4）$F(p)=\dfrac{1}{p^2(p^2+a^2)}$　　（5）$F(p)=\dfrac{p+2}{p^2(p-1)^2}$

6．求 $y''+4y'+5y=f(t)$，$(t\geqslant 0)$

的通解，其中 $f(t)$ 已知。

7．利用拉普拉斯变换求解下列边值问题

$$\begin{cases}x''(t)+x(t)=10\sin 2t\\ x(0)=0,\quad x\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.\end{cases}$$

8．求微分积分方程

$$y'+3y+2\int_0^t y\,dt=2u(t-1)-2u(t-2)$$

满足初始条件 $y(0)=1$ 的解.

9．求变系数微分方程

$$ty''+(1-n-t)y'+ny=t-1\ (n=2,3,4,\cdots)$$

满足初始条件 $y(0)=0$ 的解。

10．设具有一个自由度的振动系统，质量为一个单位，自振频率为 ω，当此系统受到外力为 $u(t-\tau_0)$ 的作用时，其运动微分方程为

$$y''+\omega^2 y=u(t-\tau_0)\quad t>\tau_0$$

初始条件为

$$y(0)=y'(0)=0$$

求运动 $y(t)$。

第二章　傅里叶积分与傅里叶变换

本章先极其简要地复习了傅里叶级数的基本结论及其物理意义，并从函数在区间 $(-l, l)$ 上的傅里叶级数展开式出发，讨论当 $l \to +\infty$ 时它的极限形式，得出函数的傅里叶积分展开式。然后在此基础上定义傅里叶 (Fourier)变换(包括双侧变换、正弦变换、余弦变换)，并由傅里叶积分公式导出傅里叶逆变换的分析表达式。关于傅里叶积分定理与傅里叶积分变换的应用，我们举出某些广义积分计算及求解某些方程作为例子。在本章最后两节，作为选学内容，介绍了傅里叶变换与拉普拉斯变换之间的关系、n 元函数的傅里叶变换概念以及怎样由傅里叶积分定理导出拉普拉斯逆变换的分析表达式。

学习本章要有傅里叶级数理论、广义积分以及复函数论等方面的基础。

*§2.1　傅里叶级数概要

(一) 简谐振动与简谐振动的叠加

简谐振动　简谐振动是最简单的往复周期运动，如单摆、无阻尼自由运动等。其运动方程可表示为：

$$y = h\cos(\omega t - \alpha) \tag{2.1.1}$$

其中变量 t 为时间；常量 h 为振幅，ω 为圆频率（简称频率，下同），α 为初位相。而运动周期为 $T = 2\pi/\omega$，运动频率为 $\nu = 1/T = \omega/2\pi$。其运动规律可模拟为作匀角速圆周运动的小球 M 在 y 轴上投影 N 的运动（图 2-1），圆周半径为 h，角速度为 ω。

若一质点作直线运动，其方程为

$$y = a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.1.2}$$

我们令$\sqrt{a^2+b^2}=h$， $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}=\alpha$（如图 2-2 所示），则 $a=h\cos\alpha$， $b=h\sin\alpha$，代入（2.1.2）式得

$$y=h(\cos\alpha\cos\omega t+\sin\alpha\sin\omega t)$$
$$=h\cos(\omega t-\alpha)$$

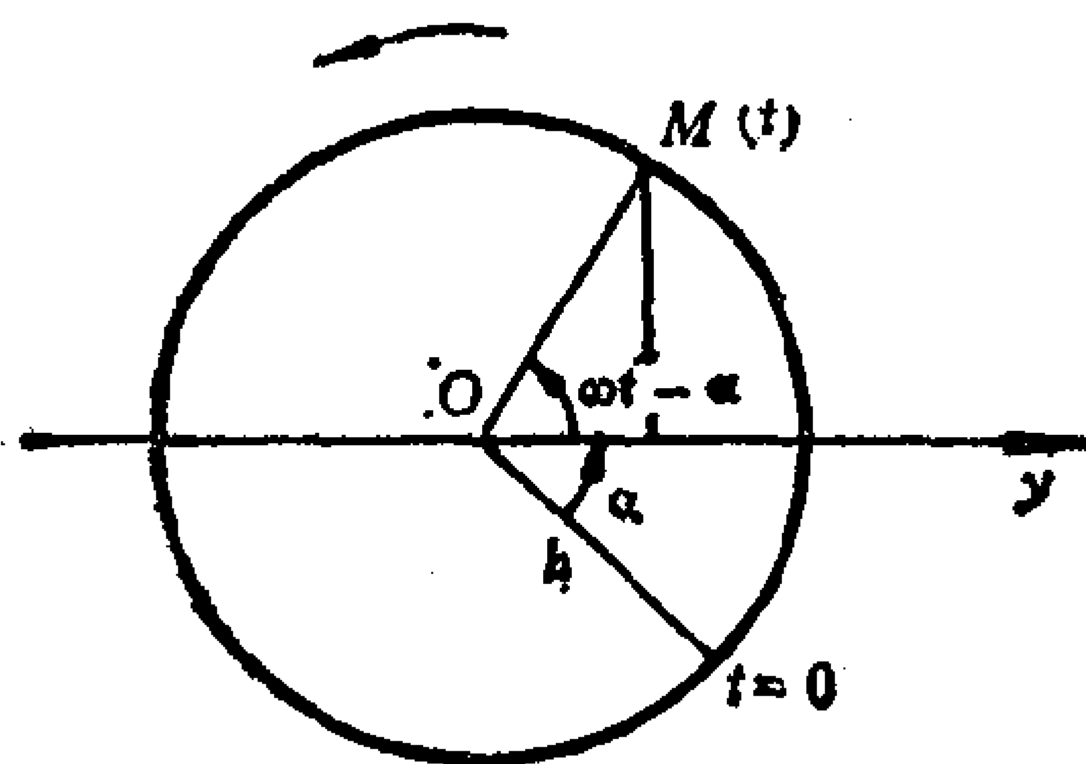


图 2-1

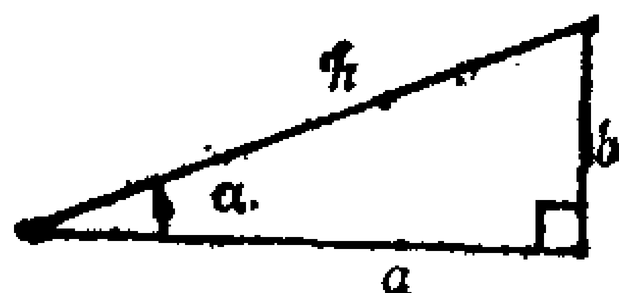


图 2-2

由此知（2.1.2）也是简谐振动，其振幅为 $h=\sqrt{a^2+b^2}$，频率为ω，周期$T=\frac{2\pi}{\omega}$。

设$\omega=\frac{\pi}{l}$，其中 l 为某一确定正数。考虑一组以ω及其倍数为频率的简谐振动（y_0 除外）：

$$y_0=\frac{a_0}{2}$$

$$y_n=a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t。(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

$y_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 的频率 ω_n 依序为

$$\omega_1=\frac{\pi}{l}=\omega,\quad \omega_2=\frac{2\pi}{l}=2\omega,\quad \cdots,$$

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}=n\omega,\quad \cdots$$

而其周期T_n，依序为

$$T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}=2l,\ T_2=\frac{1}{2}T_1=l,\ \cdots,\ T_n=\frac{1}{n}T_1=\frac{2l}{n},\ \cdots$$

显然，诸 y_n 的共同周期便是 $T_1=2l$，从而它们的迭加

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right) \tag{2.1.3}$$

也是一个以 $T_1=2l$ 为周期的运动，但不是简谐运动。

（二）周期函数的分解

现在我们反过来提问题：“一个以 $T=2l$ 为周期的复杂运动 $f(t)$，是否可以分解成一些简谐振动的和呢？”若从纯数学的角度提问题，便是：“一个以 $T=2l$ 为周期的复杂函数 $f(t)$，是否可以展开成形如（2.1.3）式的由最简单的周期函数所组成的三角级数呢？”回答是肯定的，只要 $f(t)$ 满足某些条件。这便是傅里叶级数理论中著名的收敛定理：

收敛定理 若函数 $f(t)$ 在区间 $[-l,\ l]$ 上满足**狄义赫里条件**：

1. $f(t)$ 在该区间上或者连续，或者只具有有限个第一类间断点（在第一类间断点 c 上，函数的左极限 $f(c-0)$ 和右极限 $f(c+0)$ 存在，它们或者不相等，或者相等但不等于 $f(c)$）。

2. $f(t)$ 在该区间上至多有有限个极值点，亦即可以把区间 $[-l,\ l]$ 分成 $f(t)$ 的有限个单调区间。则有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)=\begin{cases}\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}, & t\in(-l,\ l)\\[2ex] \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & t=\pm l\end{cases} \tag{2.1.4}$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(u)\cos\dfrac{n\pi u}{l}du \ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(u)\sin\dfrac{n\pi u}{l}du \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases} \tag{2.1.5}$$

显然，若$t\in(-l,\ l)$是$f(t)$的连续点，(2.1.4)式等号右端便是$f(t)$。

由上述定理可知：

① 若再增设$f(t)$是定义在区间$(-\infty,\ +\infty)$上的以$T=2l$为周期的连续函数，则在整个定义域$(-\infty,\ +\infty)$上，有

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

$$t\in(-\infty,\ +\infty)$$

其中系数$a_n(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$、$b_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$由(2.1.5)式确定。

② 若再增设$f(t)$是定义在区间$(-\infty,\ +\infty)$上的连续函数，但不是周期函数，则仅在区间$(-l,\ l)$内才有

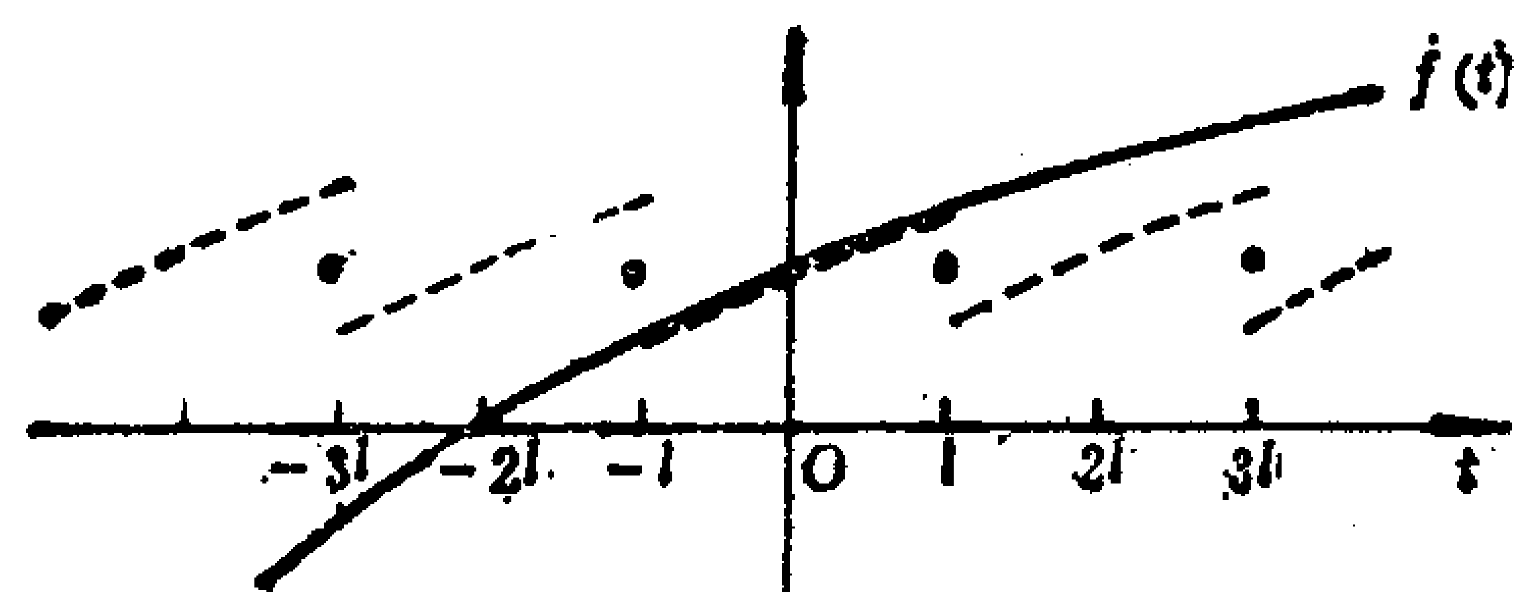
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

$$t\in(-l,\ l) \tag{2.1.6}$$

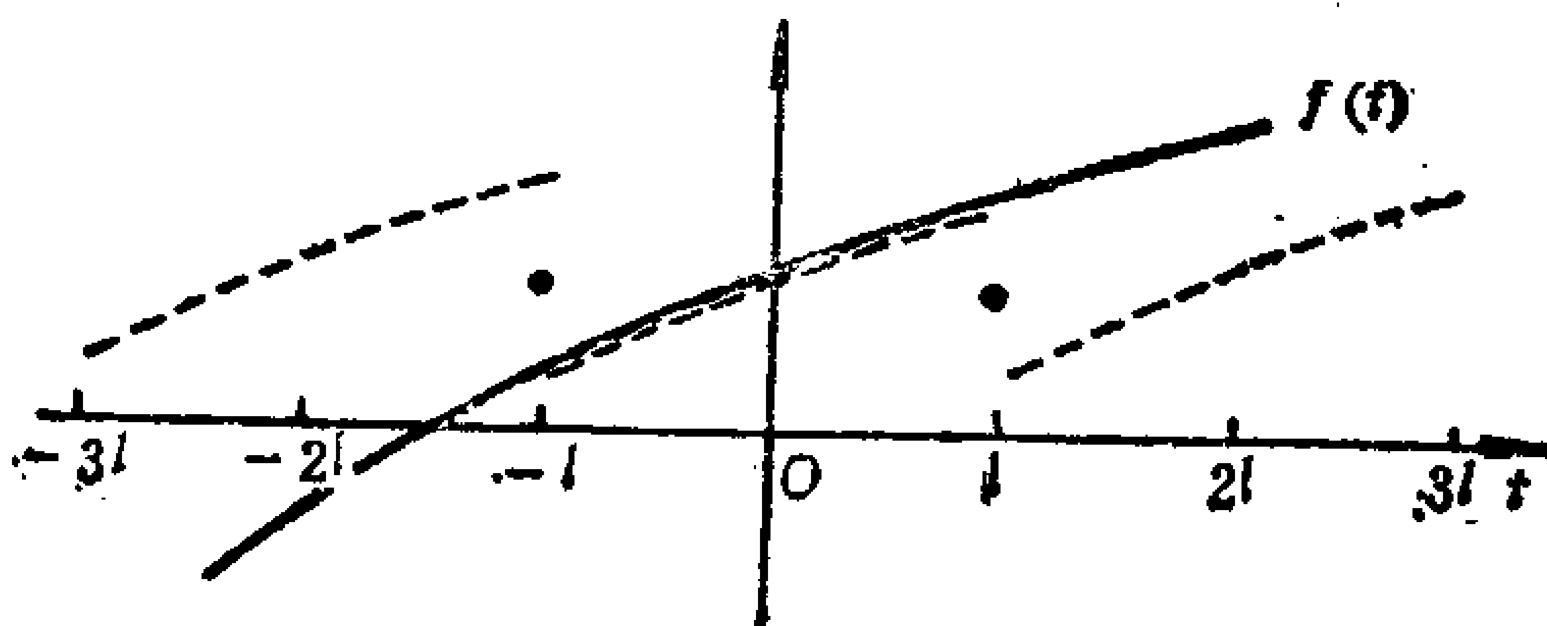
其中系数a_n、b_n仍然是傅里叶系数，确定法同上。我们在图2-3(a)中用实线表示函数$f(t)$，用虚线表示$f(t)$所生成的傅里叶级数；从图中看出：虽然在$(-l,\ l)$中函数与级数重合，但在$(-l,\ l)$之外函数$f(t)$与级数却全然不同。这里引出了一个新问题。

（三）非周期函数的展开问题

“怎样使非周期函数$f(t)$与它所生成的傅里叶级数重合部分更多呢？”显然只有增大l的取值这一个办法。正如图2-3所



(a) l较小



(b) l较大

图 2-3

示：l 较小时，$f(t)$ 与级数重合部分较少；l 较大时，$f(t)$ 与级数重合部分较多。在下节，我们讨论当 $l\to+\infty$时，(2.1.6)式变成什么形式？

§2.2 傅里叶积分公式

本节设函数 $f(t)$ 定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$上（$f(t)$ 不一定是周期函数），并在其上绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt=Q<+\infty$$

我们还设 $f(t)$ 在每一个有限区间 $(-l,l)$ 上都满足狄义赫里条件。

(一) 傅里叶积分定理

由上节收敛定理知，在区间 $(-l,\ l)$ 内的连续点上，函数 $f(t)$ 可用傅里叶级数表示成

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

$$t\in(-l,l) \qquad (2.2.1)$$

其中系数 a_n、b_n为傅里叶系数，由（2.1.5）式确定。

为表示非周期函数在所有 t 上的函数值 $f(t)$，很自然地想到在上式中令 $l\to+\infty$。这时（2.2.1）式中 n 阶简谐分量 $\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$的频率

$$\alpha_n=\frac{n\pi}{l}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\tag{2.2.2}$$

本来取等差

$$\Delta\alpha_n=\alpha_{n+1}-\alpha_n=\frac{\pi}{l}$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\tag{2.2.3}$$

的离散值：$\frac{\pi}{l}$，$\frac{2\pi}{l}$，$\frac{3\pi}{l}$，…，便变成频率 α 由 0 到 $+\infty$ 取连续的值了。

在令 $l\to+\infty$之前，我们先将（2.2.1）式变形。把（2.1.5）式代入（2.2.1）式，整理后得

$$f(t)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(u)du+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi}{l}(t-u)du=\mathrm{I}+\mathrm{II}\tag{2.2.1$'$}$$

其中记号 I 表示上式右端第一项，II 表示上式右端剩下的级数项。

$l\to+\infty$时，显然 $\mathrm{I}\to0$；这是因为

$$|\mathrm{I}|=\frac{1}{2l}\left|\int_{-l}^{l}f(u)du\right|\leqslant\frac{1}{2l}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(u)|du=\frac{Q}{2l}\to0$$

再利用（2.2.2）及式（2.2.3）式所引入的记号，把 II 改写为

$$\mathrm{II}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-l}^{l}f(u)\cos\alpha_n(t-u)du\right]\Delta\alpha_n$$

我们可以把它看成 α 的函数●

$$\Phi(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

在区间（0，$+\infty$）上的积分和：$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(\alpha_n)\Delta\alpha_n$。当 $l\to+\infty$ 时，$\Delta\alpha_n\to 0$，上述积分和便趋向积分 $\int_0^{+\infty}\phi(\alpha)d\alpha$，即

$$\mathrm{I}\to\int_0^{+\infty}\Phi(\alpha)d\alpha$$

于是对（2.2.1)′式取 $l\to+\infty$ 时，变成

$$f(t)=\int_0^{+\infty}\phi(\alpha)d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

$$t\in(-\infty,\ +\infty)$$

如此，我们引出命题

傅里叶积分定理 若函数 $f(t)$ 定义在区间（$-\infty$，$+\infty$）上，并在其上绝对可积；并且 $f(t)$ 在任何有限区间上都满足狄义赫里条件，则在函数的所有连续点上，都有

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du \tag{2.2.4}$$

若 t 是 $f(t)$ 的间断点，则上式左端应为

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

这是因为导出（2.2.4）式的傅里叶级数式（2.2.1)及(2.2.1)′，在间断点上，左端也是左、右极限的平均值。

● 仔细的读者会发现这一步推导不严格，从而使得整个推导都不严格，不能当作严格的证明。但这种推导方法比较容易接受，所以被国内外许多教材所采用。严格的证明，可参考菲赫金哥尔茨著《数学分析原理》（中译本）第二卷二分册 § 409及 § 410或其他数学分析教材。

（二） 函数的傅里叶积分展开式

利用差角的余弦公式，傅里叶积分公式（2.2.4）可变为与傅里叶级数相对应的形式

$$f(t)=\int_{0}^{+\infty}[A(\alpha)\cos\alpha t+B(\alpha)\sin\alpha t]d\alpha \tag{2.2.5}$$

其中

$$\begin{cases} A(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha u du \\ B(\alpha)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha u du \end{cases} \tag{2.2.6}$$

从以上两式可以看出它们与傅里叶级数展开式（2.2.1)及其系数公式（2.1.5）的相似性。在那里，定义在有限区间（$-l$，l）上的函数按简谐振动展开，那些简谐振动的频率是等差的离散值。在这里，我们得到了定义在无限区间（$-\infty$，$+\infty$）上函数$f(t)$依简谐振动的展开式，这些简谐振动的频率α却是由0连续变化到$+\infty$。

（2.2.5）式的右端，往往被称作为函数$f(t)$的傅里叶积分展开式，或函数$f(t)$的傅里叶积分。

若t是函数$f(t)$的间断点，则（2.2.5)式左端与(2.2.4)式左端一致，应为

$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$$

〔例1〕 将函数$f(t)=\begin{cases} 1, & |t|<2, \\ 0, & |t|\geqslant 2, \end{cases}$ 展开成傅里叶积分。

解 把所给函数代入（2.2.6）式得

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\cos\alpha u du=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_{-2}^{2}\sin\alpha u du=0$$

从而由（2.2.5）式得

$$f(t)=\int_0^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha t d\alpha$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha t\sin 2\alpha}{\alpha}d\alpha \qquad (t\neq\pm 2)$$

当 $t=\pm 2$ 时，积分应收敛为 $\frac{f(\pm 2+0)+f(\pm 2-0)}{2}$ $=\frac{1}{2}$，它与 $f(\pm 2)=0$ 不同。

〔例 2〕 试利用广义积分公式 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ ● 验证例 1 结论的正确性。

解 容易知道

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & (a>0)\\ 0, & (a=0)\\ -\frac{\pi}{2}, & (a<0)\end{cases} \qquad (2.2.7)$$

事实上，$a=0$ 时，结果是显然的。$a\neq 0$ 时，令 $|a|t=x$，则

$$\sin at=\frac{a}{|a|}\sin|a|t=\frac{a}{|a|}\sin x,$$

$$dt=\frac{1}{|a|}dx$$

● 这个积分公式的推证请参看《复变函数》有关部分。它也可以由计算二重积分 $\iint\limits_{(D)}e^{-xy}\sin x dx dy$ 得到，其中积分域（D）为第一象限。

容易算得，先对 x 积分再对 y 积分得 $\frac{\pi}{2}$，而先对 y 积分得 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$，从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}dt=\frac{a}{|a|}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\ dx=\frac{a}{|a|}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2},\ (a>0)\\[2ex]-\dfrac{\pi}{2},\ (a<0)\end{cases}$$

现在回到例1结论中的积分。利用式（2.2.7）得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha t\sin 2\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2+t)\alpha}{\alpha}d\alpha$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2-t)\alpha}{\alpha}d\alpha$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2},\ (2+t>0)\\ 0,\ (2+t=0)\\ -\dfrac{1}{2},\ (2+t<0)\end{cases}+\begin{cases}\dfrac{1}{2},\ (2-t>0)\\ 0,\ (2-t=0)\\ -\dfrac{1}{2},\ (2-t<0)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1,\ (|t|<2)\\ \dfrac{1}{2},\ (|t|=2)\\ 0,\ (|t|>2)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}f(t), & (t\neq\pm 2)\\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2} & (t=\pm 2)\end{cases}$$

这样，我们便通过实际计算验证了例1结论的正确性；而例1的结论却是由傅里叶积分定理得到的。

〔例3〕 指数衰减函数定义为

$$h(t)=e^{-\beta t}\cdot u(t)=\begin{cases}e^{-\beta t} & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}\qquad(\beta>0)$$

其中 $u(t)$ 为单位阶跃函数（参看第一章§1.1(二)），试求它的傅里叶积分表达式。

解 把$h(t)$代入（2.2.6）式得

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\cos\alpha t dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{e^{-\beta t}}{\alpha^2+\beta^2}(-\beta\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t)\Big|_{t=0}^{t=+\infty}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

同理可得

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}\sin\alpha t dt=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

从而由（2.2.5）式得

$$h(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}(\beta\cos\alpha t+\alpha\sin\alpha t)d\alpha$$

解完。注意，$t=0$时，上式左端应为$\frac{h(+0)+h(-0)}{2}$

$=\frac{1}{2}$。

奇偶函数的傅里叶积分展开式

若$f(t)$是偶函数，则式（2.2.6）中第一式的被积函数是偶函数，第二式的被积函数是奇函数，于是推知

$$\begin{cases}A(\alpha)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}f(u)\cos\alpha u du\\ B(\alpha)=0\end{cases}$$

所以（2.2.5）式变为

$$f(t)=\int_0^{+\infty}A(\alpha)\cos\alpha t d\alpha$$

即

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\alpha t d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\cos\alpha u du$$

$$(-\infty<t<+\infty) \qquad (2.2.8)$$

若$f(t)$是奇函数，则同样可得

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\alpha t d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\sin\alpha u du$$
$$(-\infty<t<+\infty) \qquad (2.2.9)$$

（三）单侧函数的傅里叶余弦积分展开式与正弦积分展开式

若函数$f(t)$只是确定在半无穷区间（0，$+\infty$）上（这种函数简称为单侧函数），我们可以把它延续● 到区间($-\infty$，0）上，或者成为偶函数，或者成为奇函数。这样，对于区间（0，$+\infty$）上的同一个函数$f(t)$，便得到了两个傅里叶积分展开式，依次为：

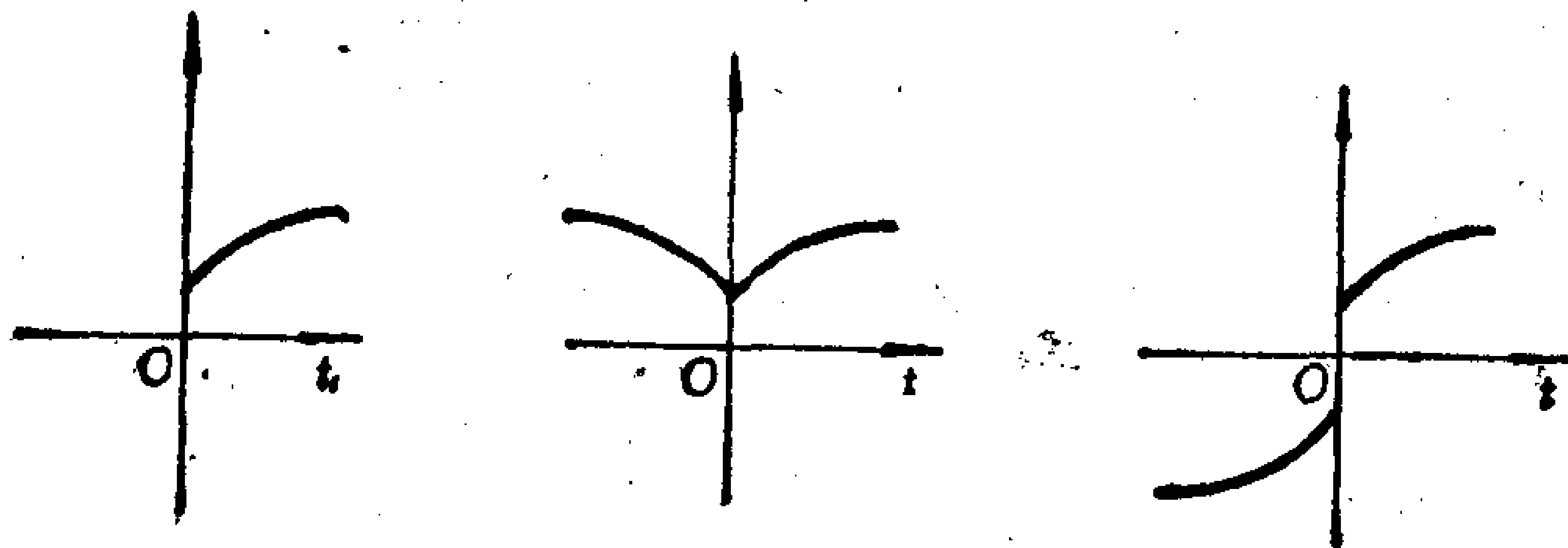
$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\alpha t d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\cos\alpha u du$$
$$(t>0) \qquad (2.2.10)$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\sin\alpha t d\alpha\int_0^{+\infty}f(u)\sin\alpha u du$$
$$(t>0) \qquad (2.2.11)$$

它们分别称为函数$f(t)$在区间（0，$+\infty$）上的傅里叶余弦积分展开式及傅里叶正弦积分展开式。

以上讨论，与在傅里叶积分理论中将定义在（0，l）上的函数既可以展成余弦级数，又可以展成正弦级数的思路是相似的。

● 关于延续的概念，请看下面说明图



§2.3 傅里叶变换概念

本节中，我们先给出傅里叶变换的定义。然后将上节的傅里叶积分公式变形，并在此基础上推导出傅里叶变换的反演公式。

（一）傅里叶变换的定义

定义 对定义在区间（$-\infty$，$+\infty$）上的实自变量 t 的函数 $f(t)$，乘以 $e^{-i\alpha t}$（α 为实数），然后对 t 由 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分●。若此广义积分收敛，则此积分确定了一个实变数 α 的复值函数 $F(\alpha)$，即

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt \tag{2.3.1}$$

这样，式（2.3.1）中的积分给出了函数 $f(t)$ 与另一个函数 $F(\alpha)$ 的对应规律，这种对应规律叫积分变换。这里的积分变换，称作**傅里叶变换**，用记号 $\mathscr{F}\{f(t)\}$ 表示。即

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$$

所以式（2.3.1）变成

$$F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)\}。$$

函数 $F(\alpha)$ 称为函数 $f(t)$ 的**像函数**，或称为函数 $f(t)$ 的傅里叶变换的结果，也简称为 $f(t)$ 的傅里叶变换。反之，我们称 $f(t)$ 为 $F(\alpha)$ 的**像原函数**或**傅里叶逆变换**。$F(\alpha)$ 的逆变换用记号 $\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$ 表示，所以由（2.3.1）式有

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}$$

表示像函数 $F(\alpha)$ 的积分式（2.3.1），其被积函数 $f(t)\cdot e^{-i\alpha t}$ 是实自变量的复值函数，其积分是一复值函数的积分；这种积分可以从我们所熟悉的实值函数积分的角度去理解，即利用著名的欧拉公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 将它看作两个实值函数 $f(t)$

● 这种广义积分，是哥西（Cauchy）意义下的主值，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)dt=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}x(t)dt$$

$\cdot\cos\alpha t$与$f(t)\sin\alpha t$的积分的线性组合

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\alpha t dt - i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\alpha t dt$$

我们约定，像原函数今后均用小写字母表示，如$f(t)$、$g(t)$等等。它们所对应的像函数，则分别用对应的大写字母$F(\alpha)$、$G(\alpha)$表示，即有

$$F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)\},\quad G(\alpha)=\mathscr{F}\{g(t)\}$$

及

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\},\quad g(t)=\mathscr{F}^{-1}\{G(\alpha)\}$$

显然，像函数$F(\alpha)$中的F，与花括号{ }前面的花体字母$\mathscr{F}$含义全然不同；前者是函数记号，后者是傅里叶变换的专用记号。

〔例1〕 求指数衰减函数 $u(t)e^{-\beta t}$的傅里叶变换。

解 由定义

$$\mathscr{F}\{u(t)e^{-\beta t}\}=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-\beta t}\cdot e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{0}^{+\infty} e^{-(\beta+i\alpha)t}dt=\frac{1}{\beta+i\alpha}\qquad(\beta>0)$$

与此对应，便有

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\beta+i\alpha}\right\}=u(t)e^{-\beta t}\qquad(\beta>0)$$

〔例2〕 求函数$\varphi(t)=\begin{cases}1, & |t|<c,\\ 0, & |t|>c。\end{cases}$的傅里叶变换，并画出它们的图形。

解 由定义

$$\Phi(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)e^{-i\alpha u}du=\int_{-c}^{c} e^{-i\alpha u}du$$

$$= 2\int_0^c \cos\alpha u du$$

$$=\begin{cases} \dfrac{2\sin\alpha c}{\alpha}, & \alpha \neq 0 \\ 2c, & \alpha = 0 \end{cases}$$

取 $c=3$，对应的 $\varphi(t)$ 及 $\Phi(\alpha)$ 的图形如下：

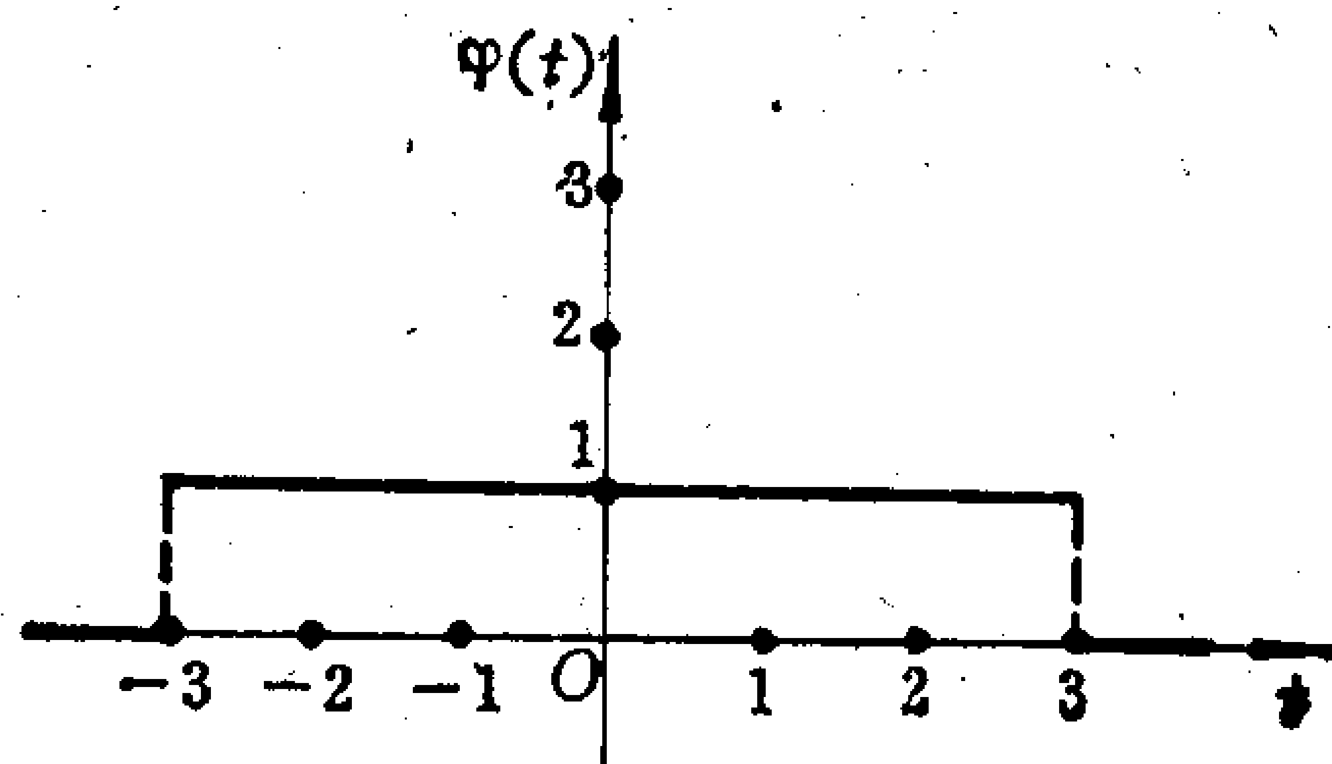


图 2-4

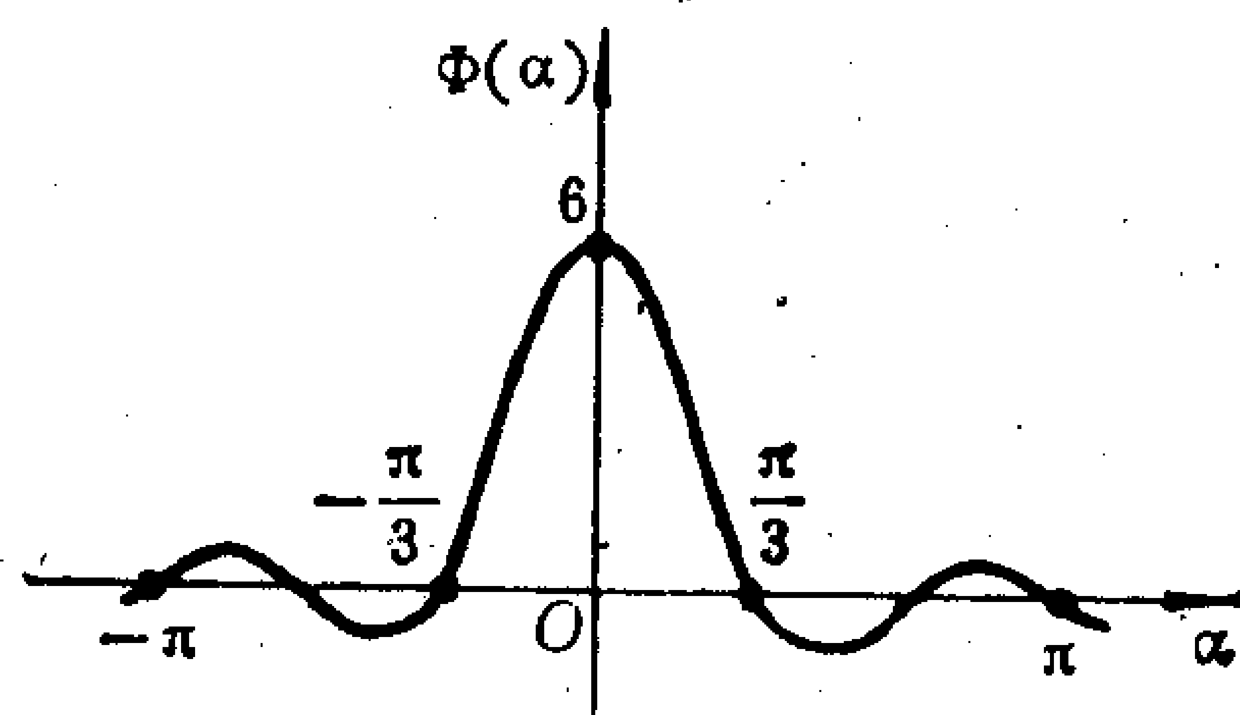


图 2-5

*〔例 3〕 求 $f(t)=e^{-t^2}$ 的傅里叶变换。

解

$$\mathscr{F}\{e^{-t^2}\}=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-i\alpha x}dx$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x+\frac{i\alpha}{2}\right)^2}dx$$

$$= e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\int_{-\infty+\frac{i\alpha}{2}}^{+\infty+\frac{i\alpha}{2}} e^{-z^2}dz \qquad (2.3.2)$$

其中令 $x+\dfrac{i\alpha}{2}=z$。上述积分的路径是（Z）平面上与实轴平行的直线 $z=\dfrac{i\alpha}{2}$，也即有向直线段 $\overrightarrow{DC}$，当 $R\to+\infty$ 时的极限（图 2-6）。

因 e^{-z^2} 在（Z）平面上解析，所以，对任意的 R 所对应的矩形闭路 $ABCDA$(图 2-6) 积分为 0，即

$$\oint_{ABCDA}e^{-z^2}dz=\int_{\overrightarrow{AB}}e^{-z^2}dz+\int_{\overrightarrow{BC}}e^{-z^2}dz+\int_{\overrightarrow{CD}}e^{-z^2}dz+\int_{\overrightarrow{DA}}e^{-z^2}dz=0 \tag{2.3.3}$$

其中

$$\int_{\overrightarrow{AB}}e^{-z^2}dz=\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx\to\sqrt{\pi}\text{●}\ (\text{当 } R\to+\infty \text{ 时}) \tag{2.3.4}$$

而

$$\int_{\overrightarrow{BC}}e^{-z^2}dz=\int_0^{\alpha/2}e^{-(R+iy)^2}d(R+iy)=ie^{-R^2}\int_0^{\alpha/2}e^{y^2-2Ryi}dy$$

因为

$$\left|\int_{\overrightarrow{BC}}e^{-z^2}dz\right|\leqslant e^{-R^2}\int_0^{\alpha/2}|e^{y^2-2Ryi}|dy=e^{-R^2}\int_0^{\alpha/2}e^{y^2}dy$$

● 积分公式 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$ 的证明可参看微积分学二重积分部分。证明大致步骤如下，利用

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\iint\limits_{(D)}e^{-(x^2+y^2)}d\sigma$$

其中（D）为全平面，将二重积分化到极坐标系中计算可得。

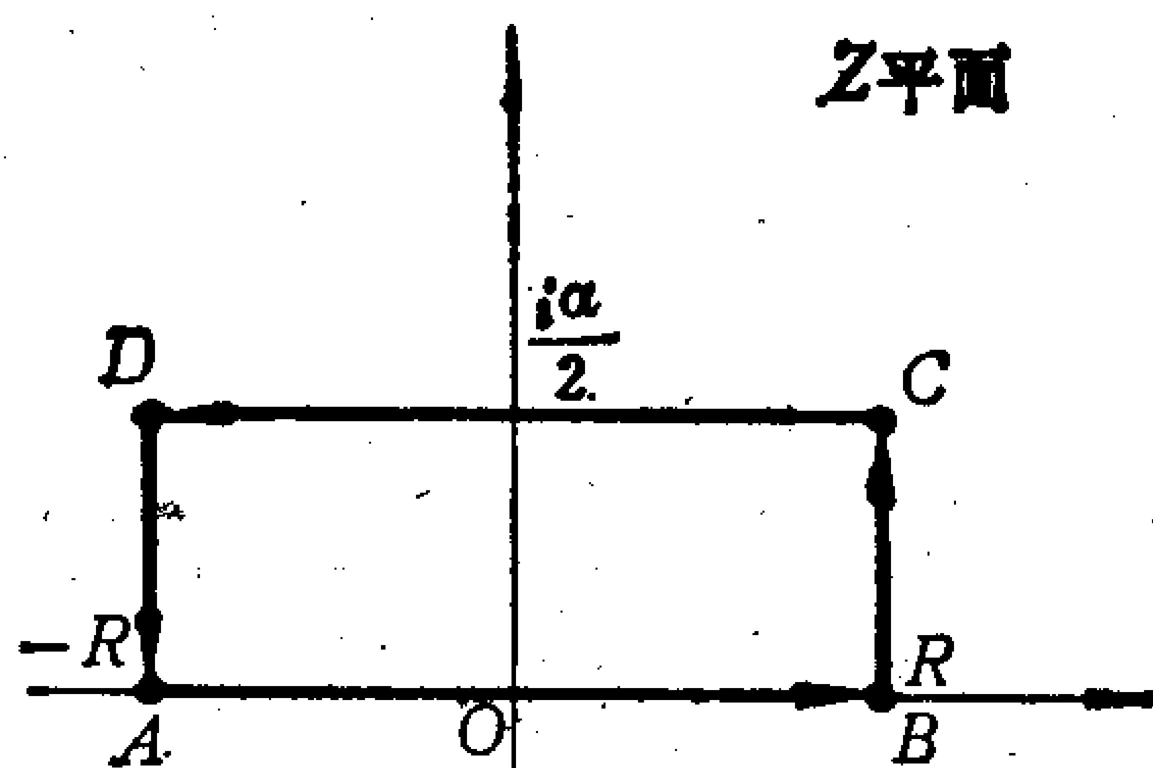


图 2-6

所以当$R\to+\infty$时，

$$\int_{\overrightarrow{BC}} e^{-z^2}dz\to 0 \tag{2.3.5}$$

同理有

$$\int_{\overrightarrow{DA}} e^{-z^2}dz\to 0 \tag{2.3.6}$$

在式(2.3.3)中，令$R\to+\infty$，并把上面计算结果式(2.3.4)、式(2.3.5)、式(2.3.6) 代入，可得

$$\lim_{R\to+\infty}\left[-\int_{\overrightarrow{CD}} e^{-z^2}dz\right]=\sqrt{\pi}$$

即

$$\int_{-\infty+\frac{i\alpha}{2}}^{+\infty+\frac{i\alpha}{2}} e^{-z^2}dz=\sqrt{\pi}$$

代入式 (2.3.2)，得

$$\mathscr{F}\{e^{-t^2}\}=\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$$

解完。

与所求公式相对应，便有

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}\right\}=e^{-t^2}$$

在实际工作中，傅里叶变换并不需要一一计算，有变换表可供查用。本书末附有一简表。

（二）傅里叶积分公式的复数形式

为导出傅里叶变换的反演公式——像原函数 $f(t)$ 用像函数 $F(\alpha)$ 直接表示的公式，我们先将傅里叶积分公式变形。

在傅里叶积分公式

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du \tag{2.2.4}$$

中，其内层积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du$$

是 α 的偶函数，记作 $\varphi(\alpha)$。根据偶函数在对称区间上的积分性质知：$\varphi(\alpha)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的积分，为它在 $(-\infty, +\infty)$ 上积分值之半；于是（2.2.4）式变成了全对称的形式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos\alpha(t-u)du \tag{2.3.7}$$

又由于与 $\varphi(\alpha)$ 相对应的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha(t-u)du$$

是 α 的奇函数。根据奇函数在对称区间上的积分性质知：它在 $(-\infty, +\infty)$ 上的积分为 0，即有

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin\alpha(t-u)du$$

上式乘虚数 i，加于（2.3.7）式，再由欧拉公式便得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{i\alpha(t-u)}du$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha t}d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du \tag{2.3.8}$$

这便是傅里叶积分公式的复数形式。

（三）傅里叶变换的反演公式

(2.3.8) 式中的内层积分，恰是 $f(t)$ 的像函数

$$F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du \tag{2.3.9}$$

所以 (2.3.8) 式变成

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha t}F(\alpha)d\alpha \tag{2.3.10}$$

这便是用像函数 $F(\alpha)$ 表示或计算与之相对应的像原函数 $f(t)$ 的直接公式，简称为傅里叶变换的**反演公式**。于是，**傅里叶逆变换**便是

$$\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\alpha t}F(\alpha)d\alpha \tag{2.3.11}$$

注意到傅里叶积分公式 (2.3.8) 右端是：$f(t)$ 取傅里叶变换之后再取傅里叶逆变换，于是该式可写成

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{f(t)\}\} \tag{2.3.12}$$

注意到 (2.3.9) 式的右端是：$F(\alpha)$ 的傅里叶逆变换（即 $f(t)$）的傅里叶变换，于是该式可写成

$$F(\alpha)=\mathscr{F}\{\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\}\} \tag{2.3.13}$$

(2.3.12) 式与 (2.3.13) 式都表示了**变换与其逆变换的作用相抵消**，这本是意料之中的事。

由于利用了傅里叶积分定理才导得反演公式 (2.3.10)，所以当函数 $f(t)$ 满足傅里叶积分定理的条件时，其傅里叶变换一定存在，并有反演公式（严格地说，在间断点上，(2.3.10) 式左端应为 $\frac{1}{2}[f(t+0)+f(t-0)]$）。

（四）余弦变换与正弦变换

这里讨论的像原函数 $f(t)$ 都是单侧的，仅定义在区间 $(0,$

$+\infty$）之中；而不像本节（一）中讨论的函数 $f(t)$ 那样，在那里定义域是（$-\infty$，$+\infty$）。

我们回到§2.2中的单侧函数的傅里叶余弦积分展开式（2.2.10）及正弦积分展开式（2.2.11），并将它们依次表示为

$$\begin{cases} F_c(\alpha)=2\int_0^{+\infty} f(u)\cos\alpha u du \quad (\alpha>0) & (2.3.14) \\ f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha t d\alpha \quad (t>0) & (2.3.14)' \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_s(\alpha)=2\int_0^{+\infty} f(u)\sin\alpha u du \quad (\alpha>0) & (2.3.15) \\ f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} F_s(\alpha)\sin\alpha t d\alpha \quad (t>0) & (2.3.15)' \end{cases}$$

其中函数 $F_c(\alpha)$ 及 $F_s(\alpha)$ 分别称为函数 $f(t)$ 的**傅里叶余弦变换及傅里叶正弦变换**，分别由（2.3.14）、（2.3.15）式确定；于是与它们相应的（2.3.14）′及（2.3.15）′式，便是反演公式，分别称为**傅里叶余弦逆变换及傅里叶正弦逆变换**。

比较像函数 $F(\alpha)$、$F_C(\alpha)$ 及 $F_S(\alpha)$ 可知：当定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的函数 $f(t)$ 为偶函数时，我们有

$$F(\alpha)=F_C(\alpha) \qquad (2.3.16)$$

(用偶式延续将函数 $F_C(\alpha)$ 延续到 $\alpha<0$，因为此时 $F(\alpha)$ 是偶函数)。而当 $f(t)$ 为奇函数时，我们有

$$F(\alpha)=-iF_S(\alpha) \qquad (2.3.17)$$

(用奇式延续将函数 $F_S(\alpha)$ 延续到 $\alpha<0$，因为此时 $F(\alpha)$ 是奇函数)。

〔**例4**〕 设函数 $f(t)=e^{-bt}(b>0,\ t\geqslant 0)$，求它的余弦变换及正弦变换。

解

$$F_C(\alpha)=2\int_0^{+\infty} e^{-bu}\cos\alpha u du=\frac{2b}{b^2+\alpha^2}$$

$$F_S(\alpha)=2\int_0^{+\infty} e^{-bu}\sin\alpha u du=\frac{2\alpha}{b^2+\alpha^2}$$

显而易见，同一单侧函数，它的余弦变换与正弦变换是不同的。

§2.4 傅里叶变换的性质

以下的叙述都假设所涉及到的傅里叶变换存在。

(一) 线性性质

定理 设$f_1(t)$与$f_2(t)$为任意的两个函数，a、b为任意常数，则

$$\mathscr{F}\{af_1(t)+bf_2(t)\}=a\mathscr{F}\{f_1(t)\}+b\mathscr{F}\{f_2(t)\} \tag{2.4.1}$$

证明 由定义，我们有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{af_1(t)+bf_2(t)\} &=\int_{-\infty}^{+\infty}[af_1(u)\\ &+ bf_2(u)]e^{-i\alpha u}du=a\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)e^{-i\alpha u}du\\ &+b\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(u)e^{-i\alpha u}du\\ &=a\mathscr{F}\{f_1(t)\}+b\mathscr{F}\{f_2(t)\}\end{aligned}$$

证完。

推论

$$\mathscr{F}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\}=\sum_k a_k\mathscr{F}\{f_k(t)\}$$

同样可知，逆变换也是线性变换，即

$$\mathscr{F}^{-1}\left\{\sum_k a_k F_k(\alpha)\right\}=\sum_k a_k\mathscr{F}^{-1}\{F_k(\alpha)\}$$

(二) 对称性

定理 若$f(t)$的像函数是$F(\alpha)$，则作为t的函数$F(t)$的像函数为$2\pi f(-\alpha)$，即

$$\mathscr{F}\{F(t)\}=2\pi f(-\alpha) \tag{2.4.2}$$

证明 因$F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)\}$，由反演公式(2.3.10)

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{iut}du$$

令积分参数 $t=-\alpha$，得

$$f(-\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u)e^{-iu\alpha}du=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{F(t)\}$$

证完。

〔例 1〕 设 $f(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1。\end{cases}$ 为方便计，我们把 § 2.3 例 2 的结论简记为

$$F(\alpha)=\frac{2\sin\alpha}{\alpha}$$

在这里，若 $\alpha=0$，则以 $\alpha\to0$ 时的极限值作为函数值 $F(0)$。试由此求函数$\frac{\sin t}{t}$的傅里叶变换。

解 由对称性

$$\mathscr{F}\left\{\frac{2\sin t}{t}\right\}=2\pi f(-\alpha)=2\pi f(\alpha)$$

再由线性性质得

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\pi f(\alpha)=\begin{cases}\pi & |\alpha|<1\\ 0 & |\alpha|>1\end{cases}$$

解完。

由于

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-i\alpha t}dt=2\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t\cos\alpha t}{t}dt$$

所以便得出了一个广义积分公式

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t\cos\alpha t}{t}dt=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & |\alpha|<1\\ 0 & |\alpha|>1\end{cases}$$

特别，若 $\alpha=0$，则得 $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$，这就是我们在 § 2.2

例 2 中用到的积分公式。

（三）相似性

定理 设$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，$b\neq 0$，则

$$\mathscr{F}\{f(bt)\}=\frac{1}{|b|}F\left(\frac{\alpha}{b}\right) \qquad (2.4.3)$$

证明 由定义及积分变量代换$bt=x$可得

$$\mathscr{F}\{f(bt)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(bt)e^{-i\alpha t}dt$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{b}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\frac{\alpha}{b}x}dx, & (b>0)\\ \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty}f(x)e^{-i\frac{\alpha}{b}x}dx, & (b<0)\end{cases}$$

$$=\frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\frac{\alpha}{b}x}dx$$

$$=\frac{1}{|b|}F\left(\frac{\alpha}{b}\right)$$

证完。

*〔例 2〕 由§2.3 例 3 结论$\mathscr{F}\{e^{-t^2}\}=\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4}}$，可得重要公式

$$\mathscr{F}\{e^{-\lambda t^2}\}=\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\,e^{-\frac{\alpha^2}{4\lambda}}$$

其中$\lambda>0$。在利用相似性公式时，令$b=\sqrt{\lambda}$。

（四）时间迟缓定理

定理 设$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，$t_0$为实常数，则

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=e^{-it_0\alpha}F(\alpha) \qquad (2.4.4)$$

证明 由定义及积分变量代换$t-t_0=x$可得

$$\mathscr{F}\{f(t-t_0)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t-t_0)e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\alpha(x+t_0)}dx$$
$$=e^{-it_0\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\alpha x}dx$$
$$=e^{-it_0\alpha}F(\alpha)$$

证完。

（五）像函数的平移

定理 设$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，$\lambda$为实常数，则

$$\mathscr{F}\{f(t)e^{i\lambda t}\}=F(\alpha-\lambda) \qquad (2.4.5)$$

证明 由定义

$$\mathscr{F}\{f(t)e^{i\lambda t}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{i\lambda t}e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i(\alpha-\lambda)t}dt$$
$$=F(\alpha-\lambda)$$

证完。

若利用恒等式

$$\cos\lambda t=\frac{1}{2}(e^{i\lambda t}+e^{-i\lambda t})$$
$$\sin\lambda t=\frac{1}{2i}(e^{i\lambda t}-e^{-i\lambda t})$$

可得

推论

$$\mathscr{F}\{f(t)\cos\lambda t\}=\frac{1}{2}[F(\alpha-\lambda)+F(\alpha+\lambda)]$$
$$\mathscr{F}\{f(t)\sin\lambda t\}=\frac{1}{2i}[F(\alpha-\lambda)-F(\alpha+\lambda)]$$

〔例3〕 由§2.3例2的结论 $\mathscr{F}\{\varphi(t)\}=\frac{2\sin\alpha c}{\alpha}$及上述推论，可得

$$\mathscr{F}\{\varphi(t)\cos\lambda t\}=\frac{\operatorname{sinc}(\alpha-\lambda)}{\alpha-\lambda}+\frac{\operatorname{sinc}(\alpha+\lambda)}{\alpha+\lambda}$$

其中

$$\varphi(t)\cos\lambda t=\begin{cases}\cos\lambda t, & |t|<c\\ 0, & |t|>c\end{cases}$$

函数 $\varphi(t)$ 与 $\varphi(t)\cos\lambda t$ 的图形如图 2-7 所示（图中取 $c=\pi$，$\lambda=1$）。

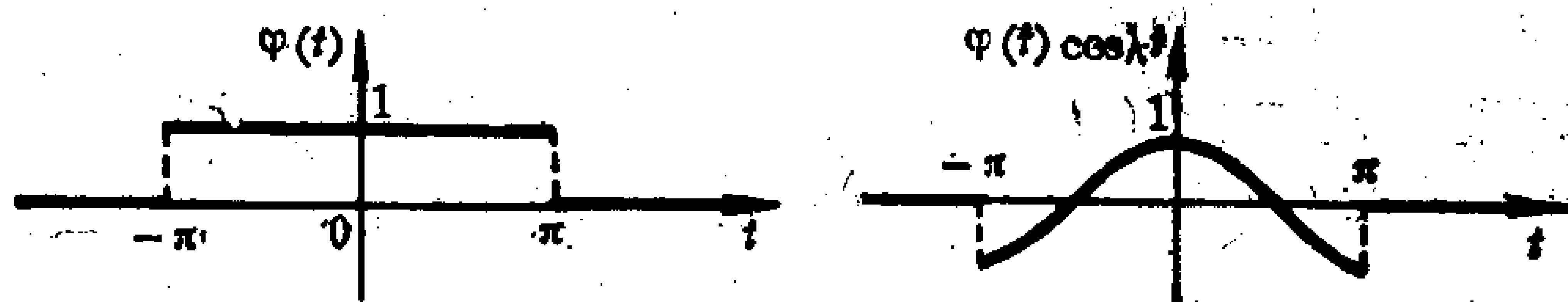


图 2-7

（六）导数的像函数

定理 设 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=0$，则

$$\mathscr{F}\{f'(t)\}=i\alpha\mathscr{F}\{f(t)\} \tag{2.4.6}$$

证明 由分部积分法

$$\mathscr{F}\{f'(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(t)e^{-i\alpha t}dt$$

$$=f(t)e^{-i\alpha t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+i\alpha\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$$

因 α、t 都是实数，$|e^{-i\alpha t}|=1$，$|f(t)e^{-i\alpha t}|=|f(t)|$。由假设条件知，上式右端第一项为 0，只剩下第二项，即 $i\alpha\mathscr{F}\{f(t)\}$，所以

$$\mathscr{F}\{f'(t)\}=i\alpha\mathscr{F}\{f(t)\}$$

利用数学归纳法，还可得

推论 若 $\lim\limits_{t\to\infty} f^{(k)}(t)=0$，$k=0, 1, \cdots, n-1$，则

$$\mathscr{F}\{f^{(n)}(t)\}=(i\alpha)^n\mathscr{F}\{f(t)\} \tag{2.4.6)'$$

（七）像函数的导数

定理 设 $\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，则

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=-i\mathscr{F}\{tf(t)\} \qquad (2.4.7)$$

证明 由定义

$$\frac{d}{d\alpha}F(\alpha)=\frac{d}{d\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\alpha t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(t)e^{-i\alpha t}dt●$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(-it)f(t)e^{-i\alpha t}dt=-i\mathscr{F}\{tf(t)\}$$

证完。

假若函数 $f(t)$ 的傅里叶变换已知，上述公式可以用来求出函数 $tf(t)$ 的傅里叶变换。

利用数学归纳法，可得

推论

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}F(\alpha)=(-i)^n\mathscr{F}\{t^nf(t)\} \qquad (2.4.7)'$$

〔**例 4**〕 由 § 2.3 例 1 的结果

$$\mathscr{F}\{e^{-\beta t}u(t)\}=\frac{1}{\beta+i\alpha}$$

及上述推论，可得公式

$$\mathscr{F}\{t^ne^{-\beta t}u(t)\}=(-i)^{-n}\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\beta+i\alpha}\right)$$

$$=\frac{n!}{(\beta+i\alpha)^{n+1}}$$

（八）积分的像函数

定理 若 t 的函数 $\int_{-\infty}^{t}f(u)du$ 满足傅里叶积分定理的条件，则

● 把导数记号放到积分号里边去，这一步不是自然成立的，是有条件的。今后在证明中遇到类似问题时，往往不叙述与论证条件，这仅仅是为了省事，特此说明。

$$\mathscr{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(u)du\right\}=\frac{1}{i\alpha}F(\alpha) \qquad (2.4.8)$$

证明 设

$$g(t)=\int_{-\infty}^{t} f(u)du$$

因 $g(t)$ 绝对可积，故有 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$。对函数 $g(t)$ 利用性质（六），得

$$\mathscr{F}\{g'(t)\}=i\alpha\mathscr{F}\{g(t)\}$$

而 $g'(t)=f(t)$，所以

$$\mathscr{F}\{g(t)\}=\frac{1}{i\alpha}\mathscr{F}\{f(t)\}=\frac{1}{i\alpha}F(\alpha)$$

证完。

（九）卷积与卷积定理

定义 含参变量 t 的积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(t-u)du$ 是 t 的函数，称作函数 $f_1(t)$ 与 $f_2(t)$ 的卷积函数，简称卷积，记作 $f_1(t)*f_2(t)$，即

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(t-u)du$$

卷积性质 卷积满足：

① **交换律**

$$f_1(t)*f_2(t)=f_2(t)*f_1(t)$$

② **对加法的分配律**

$$f_1(t)*[f_2(t)+f_3(t)]=f_1(t)*f_2(t)+f_1(t)*f_3(t)$$

③ **结合律**

$$f_1(t)*[f_2(t)*f_3(t)]=[f_1(t)*f_2(t)]*f_3(t)$$

下面我们只证明交换律而把其他性质的证明留作习题。利用积分变量代换 $t-u=v$，可得

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)f_2(t-u)du$$
$$=-\int_{+\infty}^{-\infty}f_1(t-v)f_2(v)dv$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(v)f_1(t-v)dv$$
$$=f_2(t)*f_1(t)$$

证完。

〔例5〕 设 $f_1(t)=f_2(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$，试求 $f_1(t)*f_2(t)$

解

$$f_1*f_2=\int_{-1}^{1}f_2(t-u)du \qquad (令\ t-u=w)$$
$$=\int_{t-1}^{t+1}f_2(w)dw$$
$$=\begin{cases}\int_{t-1}^{t+1}0\,dw=0 & (t\leqslant -2)\\ \int_{-1}^{t+1}dw=t+2 & (-2<t\leqslant 0)\\ \int_{t-1}^{1}dw=2-t & (0<t<2)\\ \int_{t-1}^{t+1}0\,dw=0 & (t\geqslant 2)\end{cases}$$

〔例6〕 试证明当 $f_1(t)$，$f_2(t)$ 都满足条件：$f_i(t)\equiv 0$（当 $t<0$ 时，$i=1.2$）时，它们的卷积与第一章§1.4中的定义相同。

证明 由定义及所给条件有

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)f_2(t-u)du$$
$$=\int_{0}^{+\infty}f_1(u)f_2(t-u)du$$
$$=\int_{0}^{t}f_1(u)f_2(t-u)du$$
$$+\int_{t}^{+\infty}f_1(u)f_2(t-u)du$$
$$=\int_{0}^{t}f_1(u)f_2(t-u)du+0$$
$$=\int_{0}^{t}f_1(u)f_2(t-u)du \qquad (t>0)$$

证完。当 $t<0$ 时，$f_1(t)*f_2(t)\equiv 0$。

卷积定理 两个函数卷积的像函数，等于两个函数各自的像函数的乘积，即

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\mathscr{F}\{f_1(t)\}\cdot\mathscr{F}\{f_2(t)\} \quad (2.4.9)$$

证明 作积分变量代换 $t=u+v$，并交换积分次序，则

$$\mathscr{F}\{f_1(t)*f_2(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)*f_2(t)]e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)f_2(t-u)du\right]e^{-i\alpha t}dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)f_2(v)e^{-i\alpha(u+v)}dudv$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(u)e^{-i\alpha u}du\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(v)e^{-i\alpha v}dv$$
$$=\mathscr{F}\{f_1(t)\}\cdot\mathscr{F}\{f_2(t)\}$$

证完。

类似证明可得以下定理：

频谱卷积定理 两个函数乘积的像函数，等于它们各自像函数（在实用上称为频谱函数）卷积的 $1/2\pi$ 倍，即

$$\mathscr{F}\{f_1(t)\cdot f_2(t)\}=\frac{1}{2\pi}F_1(\alpha)*F_2(\alpha)$$

（十）巴塞弗（Persevel）恒等式

定理 设$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，$\mathscr{F}\{g(t)\}=G(\alpha)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}dt \tag{2.4.10}$$

式中横线是共轭复数的记号●。

证明 由公式（2.3.9）及（2.3.10），并交换累次积分的次序

$$\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\overline{G(\alpha)}\,d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\left\{\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{-i\alpha t}\,dt}\right\}d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{g(t)}e^{i\alpha t}dt\right\}d\alpha$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha\right\}\overline{g(t)}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi f(t)\overline{g(t)}dt$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}dt$$

证完。

推论 若$f(t)=g(t)$，则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\alpha)|^2d\alpha=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt \tag{2.4.11}$$

***注释** 若在以t为自变量的函数族中，定义$f(t)$与$g(t)$的内积为

$$(f,g)=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}dt$$

● 因本书讨论的像原函数均为实值函数，所以（2.4.10）式右端的$\overline{g(t)}$就是$g(t)$。我们在此仍保留着$g(t)$上面的共轭复数记号，是为了使等号左、右具有对称的形式。

又若在以α为自变量的函数族中，定义$F(\alpha)$与$G(\alpha)$的内积为

$$(F,G)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha$$

则与之相对应的函数$f(t)$的范数（可理解为长度）$\|f\|$定义为$\sqrt{(f,f)}=\sqrt{2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2dt}$，而函数$F(\alpha)$的范数(也可理解为长度）$\|F\|$定义为$\sqrt{(F,F)}=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\alpha)|^2d\alpha}$。于是(2.4.10)式便是

$$(\mathscr{F}\{f(t)\},\ \mathscr{F}\{g(t)\})=(f(t),\ g(t))$$

它表明：**傅里叶变换保持着内积。**(2.4.11）式开方后可写成

$$\|\mathscr{F}\{f(t)\}\|=\|f(t)\|$$

它表明：**傅里叶变换保持范数。**

〔**例 7**〕 在§2.3例2的基础上计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x^2}dx$

解 由该例可知

$$\mathscr{F}\{\varphi(t)\}=\frac{2\sin\alpha}{\alpha}=\Phi(\alpha)$$

其中

$$\varphi(t)=\begin{cases}1 & |t|<1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

由巴塞弗恒等式的推论（2.4.11）式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{2\sin\alpha}{\alpha}\right)^2d\alpha=2\pi\int_{-1}^{1}1^2dt=4\pi$$

被积函数是偶函数，所以有

$$8\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha=4\pi$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

§2.5 应用举例

〔例1〕 解积分方程

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx=\begin{cases}1-\alpha, & 0\leqslant\alpha\leqslant 1\\ 0, & 1<\alpha\end{cases}$$

解 回忆（2.3.14）式，可以看出，这里的未知函数 $f(x)$ 的余弦变换为已知，是

$$F_c(\alpha)=2\int_{0}^{+\infty} f(x)\cos\alpha x dx$$

$$=\begin{cases}2(1-\alpha), & 0\leqslant\alpha\leqslant 1\\ 0, & 1<\alpha\end{cases}$$

解原积分方程的问题，就是求 $F_c(\alpha)$的逆变换的问题。由(2.3.14)′式计算得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} F_c(\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1} 2(1-\alpha)\cos\alpha x d\alpha$$

$$=\frac{2(1-\cos x)}{\pi x^2} \qquad (x>0)$$

〔例2〕 证明

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+b^2}d\alpha=\frac{\pi}{2b}e^{-bx} \qquad (x\geqslant 0)$$

当 $x=0$ 时，上式显然成立。我们只要就 $x>0$ 证明之。

证法一 设 $f(t)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{t^2+b^2}$。显然我们求证的等价命题是：$f(t)$ 的余弦变换为 $F_c(\alpha)=\frac{\pi}{2b}e^{-b\alpha}$。也即等价命题是：求证 $F_c(\alpha)=\frac{\pi}{2b}e^{-b\alpha}$的余弦逆变换为$f(t)$。下面就来证明最后这一点。

由反演公式（2.3.14)′右端的积分，计算得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\alpha)\cos\alpha t d\alpha=\frac{1}{2b}\int_0^{+\infty}e^{-b\alpha}\cos\alpha t d\alpha$$

$$=\frac{1}{2b}e^{-b\alpha}\frac{(-b\cos\alpha t+t\sin\alpha t)}{t^2+b^2}\Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=+\infty}$$

$$=\frac{1}{2(t^2+b^2)}=f(t)$$

证完。

证法二 我们将单侧函数 $f(t)=\frac{\pi}{2b}e^{-bt}$ 按式（2.2.10）展成傅里叶余弦积分展开式，便得

$$\frac{\pi}{2b}e^{-bt}=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\alpha t d\alpha\int_0^{+\infty}\frac{\pi}{2b}e^{-bu}\cos\alpha u du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+b^2}\cos\alpha t d\alpha$$

证完。

〔**例 3**〕 解积分方程

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y(u)}{(x-u)^2+a^2}du=\frac{1}{x^2+b^2}\qquad 0<a<b$$

解 方程中积分为未知函数 $y(x)$ 与函数 $\frac{1}{x^2+a^2}$ 的卷积，即 $y(x)*\frac{1}{x^2+a^2}$。对方程作傅里叶变换，即乘 $e^{-i\alpha x}$，然后对 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 作积分。由卷积定理可得

$$\mathscr{F}\{y(x)\}\cdot\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}$$

即

$$Y(\alpha)=\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}\Big/\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}$$

其中

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{x^2+a^2}dx$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2+a^2}dx=\frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}$$

计算时用了例 2 的结果。同样，

$$\mathscr{F}\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{\pi}{b}e^{-\alpha b} \tag{2.5.1}$$

所以

$$Y(\alpha)=\frac{\pi}{b}e^{-\alpha b}\Big/\frac{\pi}{a}e^{-\alpha a}=\frac{a}{b}e^{-(b-a)\alpha}$$

求逆变换，得到

$$y(x)=\frac{a}{b}\mathscr{F}^{-1}\{e^{-(b-a)\alpha}\}$$

$$=\frac{a}{b}\frac{(b-a)}{\pi}$$

$$\times\frac{1}{x^2+(b-a)^2}$$

$$=\frac{a(b-a)}{b\pi[x^2+(b-a)^2]}$$

上面用到了与公式（2.5.1）相对应的逆变换公式

$$\mathscr{F}^{-1}\{e^{-\alpha c}\}=\frac{c}{\pi}\cdot\frac{1}{x^2+c^2}$$

〔例 4〕 解微分积分方程

$$ay'(t)+by(t)+c\int_{-\infty}^{t}y(t)dt=h(t)$$

$$t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 a、b、c 为已知常数，$h(t)$ 为满足傅里叶积分定理的已知函数。

解 对原方程两边取傅里叶变换，利用公式（2.4.6）及(2.4.8)，得

$$a[i\alpha Y(\alpha)]+bY(\alpha)+c\left[\frac{1}{i\alpha}Y(\alpha)\right]=H(\alpha)$$

其中$Y(\alpha)$是未知函数$y(t)$的像函数，$H(\alpha)$是已知函数$h(t)$的像。解上式，得

$$Y(\alpha)=\frac{H(\alpha)}{b+i\left(a\alpha-\dfrac{c}{\alpha}\right)}$$

再求逆便可得解

$$y(t)=\mathscr{F}^{-1}\{Y(\alpha)\}$$

解完。

综合以上例3、例4求解过程可知，用傅里叶变换解方程的大体步骤是：①先对原方程取变换，使之变为未知函数的像函数的代数方程；②解这个代数方程，求出未知函数的像函数；③再对求出的像函数取逆，便得出我们所欲求的未知函数了。上述求解过程与第一章所述利用拉普拉斯变换解方程的过程是相似的。

〔例5〕 求两端无界的自由弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty,\quad t>0) \qquad (2.5.2)$$

满足条件

$$\begin{cases} u(x,\ 0)=f(x) \quad (-\infty<x<+\infty) & (2.5.3) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad (-\infty<x<+\infty) & (2.5.4) \\ \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0 & (2.5.5) \end{cases}$$

的解。

说明

这是一个无限长（$-\infty<x<+\infty$）的均匀柔软的弦在无外力情况下，在平衡位置附近作自由微小振动的问题。已知条件表明：该弦初始位置为$f(x)$，而初始速度$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}$处处为零。

关于自由弦振动方程，我们作补充推导如下：如图2-8选择坐标系，以$u=u(x,t)$表示弦上各点在时刻t沿垂直于x方

向的位移。在这弦上任取一小段弦，它在 x 轴上投影为 $(x, x+\Delta x)$，它的弧长为

$$\Delta s=\int_{x}^{x+\Delta x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}}\,dx$$

由于假定弦仅在平衡位置附近作微小振动，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 很小，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}$ 与 1 相比可以忽略不计，从而

$$\Delta s\approx\int_{x}^{x+\Delta x}1dx=\Delta x$$

这样，可以认为这段弦在振动过程中并未伸长，因此由虎克定律知，弦上每点所受张力在运动过程中保持不变，即张力 T 与时间 t 无关，仅与点 x 位置有关，故可记作 $T=T(x)$，其方向总是沿着弦的切线方向。

在 M 点处的张力的矢量表示为

$$\vec{T}_1=-T(x)(\cos\alpha_1\cdot \boldsymbol{i}+\sin\alpha_1\cdot \boldsymbol{j})$$

其中 α_1 为 M 点处切线的倾角，取负号是因为 $\vec{T}_1$ 方向偏左（图2-8）。

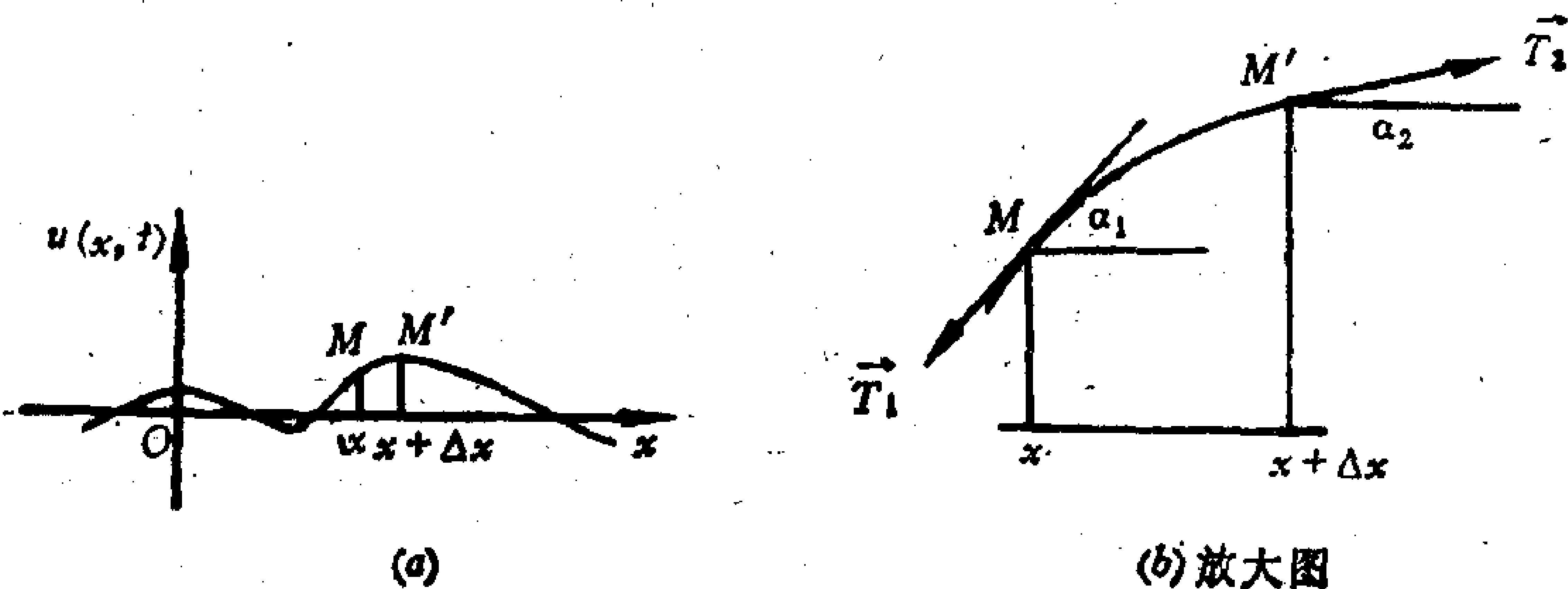


图 2-8

在 M' 点处张力的矢量表示为

$$\vec{T}_2=T(x+\Delta x)(\cos\alpha_1\cdot \boldsymbol{i}+\sin\alpha_2\cdot \boldsymbol{j})$$

其中 α_2 为 M' 点处切线的倾角。

设弦的密度为 ρ，小弦段的重心为 $\bar{x}$，则其惯性力为

$$\vec{T}=-\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},\ t)}{\partial t^2}j$$

当弦段不受外力作用，且当Δx很小我们可以把其重力$-\rho\Delta x\cdot gj$忽略不计时，根据力的平衡条件有

$$\vec{T}_1+\vec{T}_2+\vec{T}=0$$

平衡条件的分量形式为

$$\begin{cases} -T(x)\cos\alpha_1+T(x+\Delta x)\cos\alpha_2=0 & (2.5.6) \\ -T(x)\sin\alpha_1+T(x+\Delta x)\sin\alpha_2-\rho\Delta x\dfrac{\partial^2 u(\bar{x},\ t)}{\partial t^2}=0 & (2.5.7) \end{cases}$$

因我们假设弦仅在平衡位置附近作横向（垂直x轴方向）微小振动，所以$\cos\alpha_1\approx 1$，$\cos\alpha_2\approx 1$，于是（2.5.6）式变成

$$T(x+\Delta x)=T(x)$$

这表明张力处处为常数，我们设其为T_0。这样，(2.5.7)式变成

$$T_0(\sin\alpha_2-\sin\alpha_1)=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},\ t)}{\partial t^2}$$

又因$\alpha_1\approx 0$，$\alpha_2\approx 0$时有

$$\sin\alpha_1\approx \mathrm{tg}\alpha_1=\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}$$

$$\sin\alpha_2\approx \mathrm{tg}\alpha_2=\frac{\partial u(x+\Delta x,\ t)}{\partial x}$$

代入（2.5.7）式，由拉格朗日中值定理得

$$T_0\frac{\partial^2 u(x+\theta\Delta x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x=\rho\Delta x\frac{\partial^2 u(\bar{x},\ t)}{\partial t^2}$$

其中$0<\theta<1$，$x<\bar{x}<x+\Delta x$。上式除以Δx后令$\Delta x\to 0$，若设二阶偏导数连续，便得

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

令$\dfrac{T}{\rho}=a^2$，便得（2.5.2）式。

解　先把t当作参数。在方程（2.5.2)及初始条件(2.5.3)、(2.5.4）的等号两边都乘以$e^{-i\alpha x}$，然后对x从$-\infty$到$+\infty$积分，

也就是对变量x取傅里叶变换。记

$$\mathscr{F}\{u(x,t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\alpha x}dx=U(\alpha,t)$$

则若允许积分号下求导数，有

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-i\alpha x}dx=\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}ue^{-i\alpha x}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{F}\{u(x,t)\}=\frac{\partial}{\partial t}U(\alpha,t)$$

同样

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(\alpha,t)$$

再由上节性质（六）中公式（2.4.6）′及条件（2.5.5）式得

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=(\alpha i)^2U(\alpha,t)=-\alpha^2U(\alpha,t)$$

因此，原方程及初始条件变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U=-a^2\alpha^2U\\ U(\alpha,0)=F(\alpha)\\ \dfrac{\partial}{\partial t}U(\alpha,t)|_{t=0}=0\end{cases}$$

这实际上是一个常微分方程求特解的问题，只要暂时把α看作常数，即

$$\frac{d^2}{dt^2}U=-a^2\alpha^2U,\qquad U|_{t=0}=F(\alpha),$$

$$\frac{d}{dt}U|_{t=0}=0$$

解得
$$U(\alpha,t)=F(\alpha)\cos a\alpha t \tag{2.5.8}$$

再由反演公式（2.3.11）并注意$F(\alpha)$是$f(x)$的像函数，得

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\{U(\alpha,t)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)\cos a\alpha t e^{i\alpha x}d\alpha$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i(x+at)\alpha}d\alpha$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i(x-at)\alpha}d\alpha$$

$$=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2}f(x-at)$$

这就是所求的解。

也可以直接利用性质（四）求解，为此，把性质（四）改写为

$$\mathscr{F}^{-1}\{e^{-it_0\alpha}F(\alpha)\}=f(t-t_0)$$

于是由（2.5.8），得

$$u(x,t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\alpha)\cos a\alpha t\}$$

$$=\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\{e^{a\alpha ti}F(\alpha)\}$$

$$+\frac{1}{2}\mathscr{F}^{-1}\{e^{-a\alpha ti}F(\alpha)\}$$

$$=\frac{1}{2}f(x+at)+\frac{1}{2}f(x-at)$$

傅里叶变换的应用，大致有两方面。一是作为数学工具用来解决某些计算问题，如解数理方程的傅里叶方法；一是某些物理概念、物理规律要用傅里叶变换的有关概念、有关公式来描述。在其它课程中，才有可能就应用问题充分展开讨论，这里只能举些单纯的数学例子。

*§2.6 傅里叶变换概念的扩充

（一）n元函数的傅里叶变换

上节例5，是数理方程中的一维问题。若要用傅里叶变换去解多维问题，首先必须将傅里叶变换的概念推广到多元函数去。

n元函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的傅里叶变换定义如下

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\mathscr{F}\{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$
$$=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}}_{\text{共}\,n\,\text{次}}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$\times e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

傅里叶逆变换公式为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$
$$\times e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n)}d\alpha_1d\alpha_2\cdots d\alpha_n$$

可以证明，它们的性质与一元函数的傅里叶变换类似，例如

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^m}{\partial x_k^m}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right\}=(i\alpha_k)^m\mathscr{F}\{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$$

($m=1,2,3,\cdots$) 等等。这里，不再作深入讨论。有兴趣的读者请参考数学物理方程专著。

（二）衰减因子 傅里叶变换与拉普拉斯变换

我们来计算单位阶跃函数 $u(t)$ 的傅里叶变换。按定义，有

$$\mathscr{F}\{u(t)\}=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t)e^{-i\alpha t}dt=\int_0^{+\infty}e^{-i\alpha t}dt$$
$$=-\frac{1}{i\alpha}e^{-i\alpha t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}$$

其中 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-i\alpha t}$ 不存在，所以$\mathscr{F}\{u(t)\}$不存在。

我们在§2.3(三) 中曾指出，傅里叶变换存在的条件就是傅里叶积分定理的条件，条件之一是像原函数绝对可积。这个条件过于苛刻，连诸如 $u(t)$、$u(t)t$ 这样简单的函数都不能满足，从而导致它们的傅里叶变换不存在。

定义 设定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的像原函数 $f(t)$ 在 $t<0$ 时恒有 $f(t)=0$。若 $f(t)$ 的傅里叶变换不存在，但若 $f(t)e^{-\beta t}$（其中常数 $\beta>0$）的傅里叶变换是存在的（设为 $F_\beta(\alpha)$），则定义后者当 $\beta\to0^+$ 时的极限为 $f(t)$ 的傅里叶变

换，其记号仍沿用$\mathscr{F}\{f(t)\}$。

这样，便有

$$\mathscr{F}\{f(t)\}=\lim_{\beta\to 0^+}F_\beta(\alpha)=\lim_{\beta\to 0^+}\mathscr{F}\{f(t)e^{-\beta t}\} \quad (2.6.1)$$

其中

$$F_\beta(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)e^{-\beta t}\}=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-\beta t}e^{-i\alpha t}dt$$

(2.6.2)

〔例 1〕 求单位阶跃函数$u(t)$的傅里叶变换。

解 由§2.3 例 1（或由直接计算）知

$$F_\beta(\alpha)=\mathscr{F}\{u(t)e^{-\beta t}\}=\frac{1}{\beta+i\alpha} \quad (2.6.3)$$

再由定义（2.6.1）式得

$$\mathscr{F}\{u(t)\}=\lim_{\beta\to 0^+}\frac{1}{\beta+i\alpha}=\frac{1}{i\alpha}$$

〔例 2〕 求函数$u(t)t$的傅里叶变换。

解 由推算知，它的直接傅里叶变换不存在。像上例一样，我们按定义式（2.6.1）去求傅里叶变换。

由像函数的导数公式（2.4.7）及（2.6.3）式知

$$F_\beta(\alpha)=\mathscr{F}\{u(t)\,t\,e^{-\beta t}\}=i\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\beta+i\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{(\beta+i\alpha)^2}$$

再由（2.6.1）式得

$$\mathscr{F}\{u(t)t\}=\lim_{\beta\to 0^+}\frac{1}{(\beta+i\alpha)^2}=-\frac{1}{\alpha^2}$$

由上两例可看出，对直接傅里叶变换不存在的函数$f(t)$，只得通过乘以**收敛因子**$e^{-\beta t}$的办法，使（2.6.2）式中的广义积分收敛，从而解决了傅里叶变换的存在问题；但这只是$f(t)e^{-\beta t}$的而不是$f(t)$的傅里叶变换。要再由$\beta\to 0$去解决逼近问题，这

样便建立起了新的傅里叶变换概念。这种概念扩充的第一步，实际上就是改变积分核的办法——由$e^{-i\alpha t}$变为$e^{-\beta t}e^{-i\alpha t}=e^{-(\beta+i\alpha)t}$；若引入复参数$\beta+i\alpha=p$，则新积分核便是$e^{-pt}$。假若我们仅停留在此第一步上，不再令$\beta\to0^+$，情况会怎样呢？

对单侧函数$f(t)$来说，由（2.6.2）式，便有

$$F_\beta(\alpha)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt \quad (p=\beta+i\alpha)$$

这样，便引出了实自变量函数$f(t)$与复变量p的函数

$$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-pt}dt \qquad (\text{这里我们暂记作}\ \Phi(p)) \tag{2.6.4}$$

之间的对应关系。积分式（2.6.4）便是我们在上一章讨论的拉普拉斯变换。由于衰减因子的存在，自然能够使得许多傅里叶变换不存在的函数却能有拉普拉斯变换存在，从而扩大了应用。

由上可见，拉普拉斯变换在实质上是一种单侧的广义傅里叶变换。

若在式（2.6.4）中令$p=\alpha i$（即令$\beta=0$），则得单侧函数$f(t)$的傅里叶变换。所以，对单侧函数来说，若它的拉普拉斯变换是$\Phi(p)$，则它的傅里叶变换就是$\Phi(\alpha i)$（假若存在的话）。

*§2.7 拉普拉斯变换的反演公式

回忆第一章，我们曾给出了拉普拉斯逆变换的概念，但并没有导出它的一般表示式。在本节，我们将利用傅里叶积分定理，导出拉普拉斯逆变换的分析表达式——复反演公式；以及由复反演公式导出的利用留数直接计算逆变换的方法。学习本节要有复函数积分的基础。

作为有用的预备知识，我们先列出有关公式。

（一）预备知识

留数 复函数$f(z)$在n阶极点$z=a$上留数的计算公式

$$\underset{z=a}{\text{res}} f(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\} \tag{2.7.1}$$

当 $n=1$，即 a 是一阶极点时

$$\underset{z=a}{\text{res}} f(z) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \tag{2.7.2}$$

留数定理 若函数 $f(z)$ 在区域 R 内除有极点 a_1，a_2，…，a_m 外处处解析，并在 R 的边界 C 上也解析，则

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{res} f(a_k) \tag{2.7.3}$$

约当引理● 设函数 $F(p)$ 在如图 2-9 的以充分大的任意 R

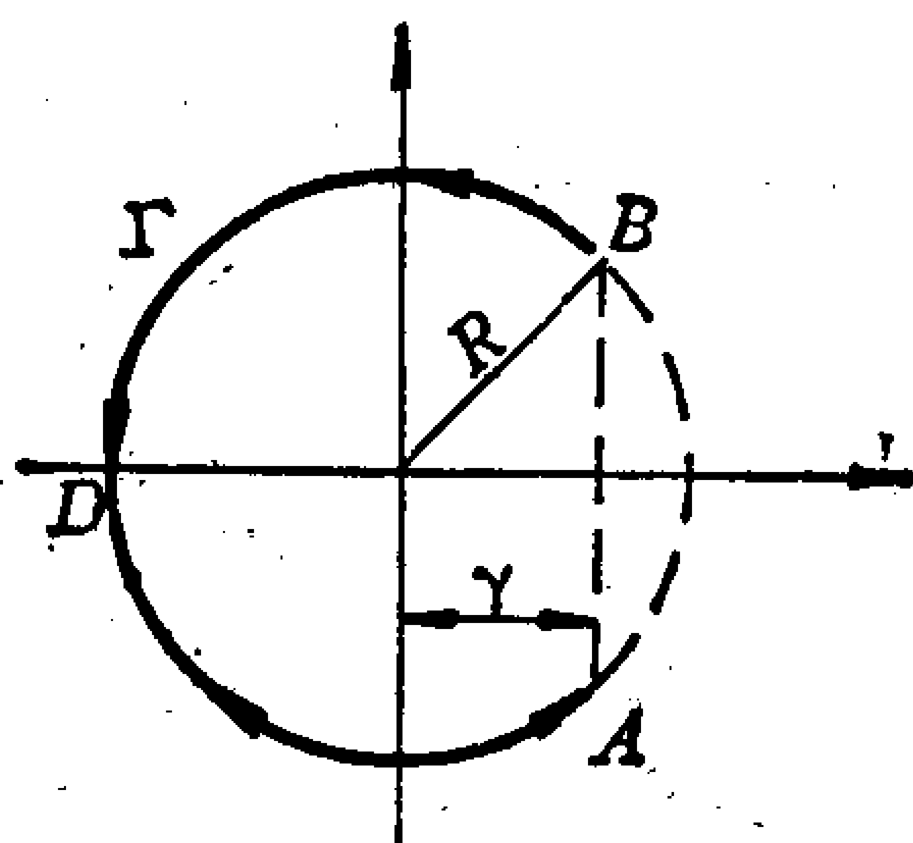


图 2-9

为半径的优圆弧 $\Gamma = \overset{\frown}{BDA}$ 上满足

$$|F(p)| < \frac{M}{R^k}$$

其中 M、k 为正常数，则

$$\lim_{R \to +\infty} \int_\Gamma e^{pt} F(p) dp = 0 \tag{2.7.4}$$

● 这是约当引理的一种形式，其证明附在本节最后。

其中 $t>0$，图中 γ 为定数。

（二）复反演公式

定理 若函数 $f(t)$ 满足拉普拉斯变换存在定理（第一章§1.1定理1-1）的三个条件：1. 当 $t<0$ 时 $f(t)=0$；2. $f(t)$ 在任意有限区间 $[0, T]$ 满足狄义赫里条件；3. $f(t)$ 是指数阶的，即存在着常数 M 及 s_0，使

$$|f(t)| \leqslant Me^{s_0 t}$$

并设 $\mathscr{L}\{f(t)\}=F(p)$，则在函数 $f(t)$ 的连续点上有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (2.7.5)$$

其中积分路径是沿着 p 平面上的直线 $\mathrm{Re}p=\gamma$ 自下而上取的，且 $\gamma>s_0$（图2-10）。

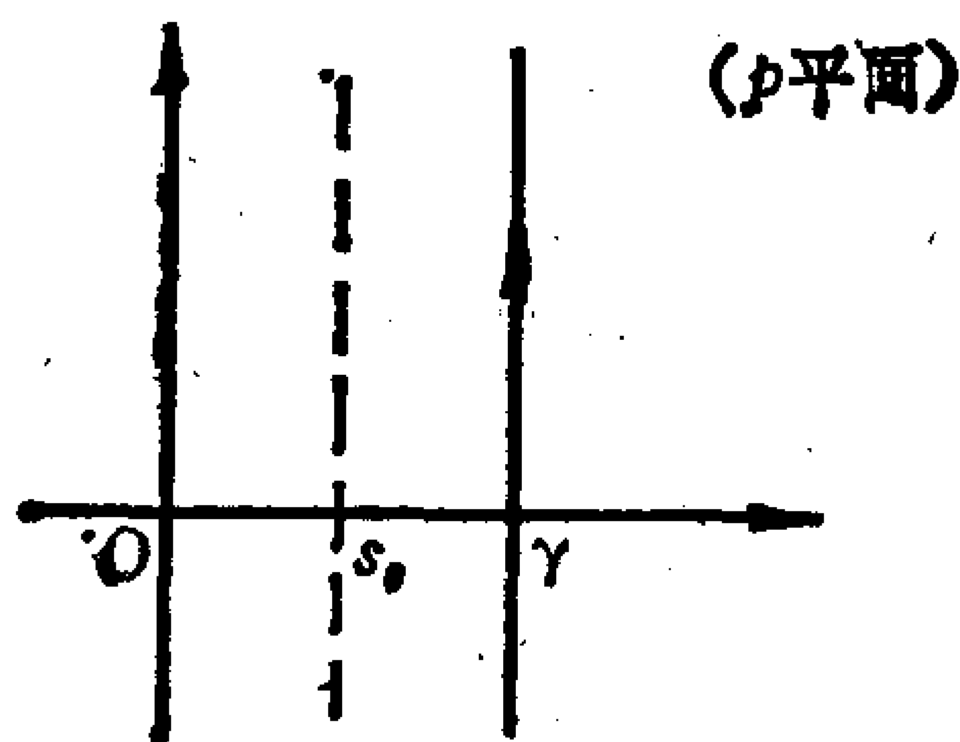


图 2-10

证明 由于 $f(t)$ 满足条件1与2，从而知函数

$$\varphi(t)=e^{-\gamma t}f(t)$$

在任意的区间 $(-l, l)$ 上满足狄义赫里条件。又由条件3及 $\gamma>s_0$，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|e^{-\gamma t}dt=\int_{0}^{+\infty}|f(t)|e^{-\gamma t}dt$$

$$\leqslant M\int_0^{+\infty} e^{(s_0-\gamma)t}dt=\frac{M}{s_0-\gamma}e^{(s_0-\gamma)t}\Big|_{t=0}^{t=+\infty}=\frac{M}{\gamma-s_0}$$

这表明φ(t)在（$-\infty$，$+\infty$）上同时也是绝对可积的，φ(t)满足了傅里叶积分定理（本章§2.2）所有条件。按该定理的复数形式（2.3.8）式，对φ(t)便有

$$e^{-\gamma t}f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{iyt}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iyu}\{e^{-\gamma u}f(u)\}du$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\gamma+iy)t}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(\gamma+iy)u}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{(\gamma+iy)t}dy\int_0^{+\infty}e^{-(\gamma+iy)u}f(u)du$$

令 $\gamma+iy=p$，则有 $idy=dp$；且对 y 的积分限 $\pm\infty$，变为对 p 的积分限 $\gamma\pm i\infty$，于是

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}dp\int_0^{+\infty}e^{-pu}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp$$

证完。

利用留数，可以把求逆公式（2.7.5）式化为下列便于实际计算的形式。

（三）用留数求像原函数

定理 若像函数 $F(p)$满足前述约当引理的条件；且它的极点至多只有有限个，都在直线 $\mathrm{Re}p=\gamma$ 的左边，此外再没有其他奇点。再假设 $F(p)$的像原函数（设为 $f(t)$）满足复反演公式定理的条件，则 $F(p)$的像原函数等于 p 的函数 $e^{pt}F(p)$的留数之和，即有

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=\sum_{k=1}^{m}\underset{p=p_k}{\mathrm{res}}\,[e^{pt}F(p)] \qquad (2.7.6)$$

其中 $p_k(k=1,\ 2,\ \cdots m)$ 是$F(p)$的所有极点，从而也是$e^{pt}F(p)$的所有极点。

证明 设图2-11中由直线段AB：$p=\gamma+iy(-T\leqslant y\leqslant T)$与以$R$为半径的圆弧$\Gamma$所围成的正向闭路为$C$，我们有

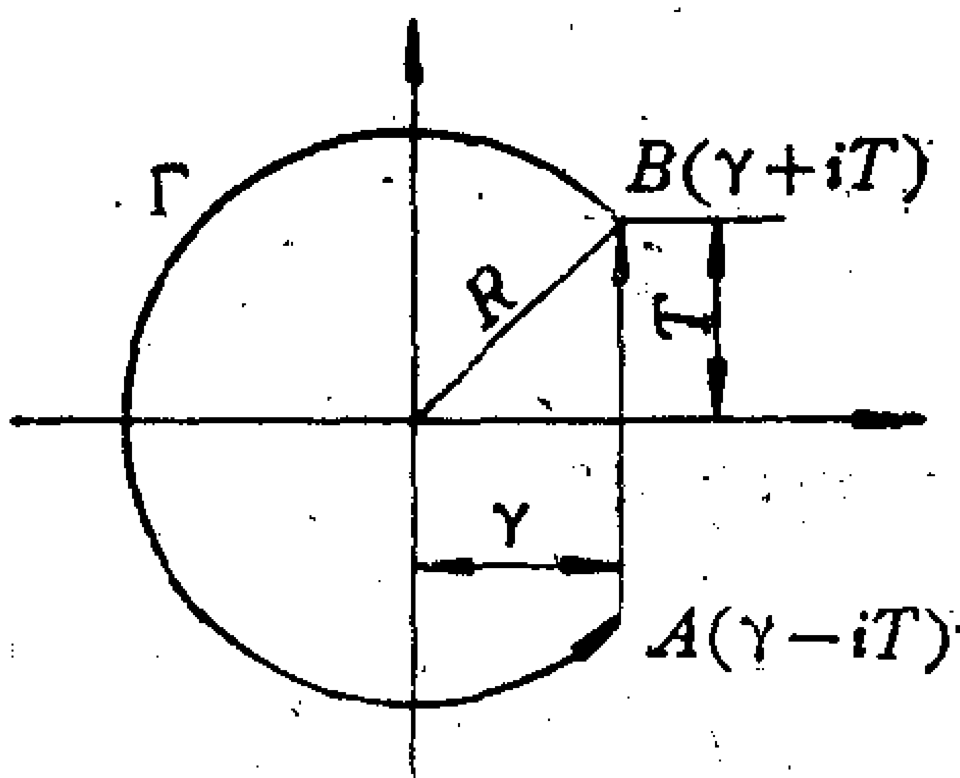


图 2-11

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{pt}F(p)dp$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{pt}F(p)dp$$

当R足够地大，使得闭路C围住所有极点时，由留数定理（公式(2.7.3)）知，上式左端的积分为

$$\sum_{k=1}^{m}\underset{p=p_k}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]$$

它显然与R无关。再令$R\to+\infty$，等号右端第一个积分的极限是复反演公式（2.7.5)，即$f(t)=\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$；又由约当引理可知，等号右端第二个积分的极限为0，所以定理得证。

还可证明，对无限多个极点，这个公式在一定条件下也成立。

〔例1〕 已知 $F(p)=\dfrac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)(p-2)}$，求$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。

解 计算留数

$$\underset{p=-1}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]=\lim_{p\to-1}e^{pt}\frac{2p^2-4}{(p-3)(p-2)}=-\frac{1}{6}e^{-t}$$

$$\underset{p=3}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]=\lim_{p\to 3}e^{pt}\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-2)}=\frac{7}{2}e^{3t}$$

$$\underset{p=2}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]=\lim_{p\to 2}e^{pt}\frac{2p^2-4}{(p+1)(p-3)}=-\frac{4}{3}e^{2t}$$

由公式（2.7.6），则得

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=-\frac{1}{6}e^{-t}+\frac{7}{2}e^{3t}-\frac{4}{3}e^{2t}$$

这结果与§1.1例5中求得的相同。

〔例2〕 已知 $F(p)=\dfrac{1}{p^2(p+1)}$，求$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}$。

解 计算留数

$$\underset{p=0}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]=\lim_{p\to 0}\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=t-1$$

$$\underset{p=-1}{\text{res}}[e^{pt}F(p)]=\lim_{p\to -i}\frac{e^{pt}}{p^2}=e^{-t}$$

由公式（2.7.6），则得

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(p)\}=e^{-t}+t-1$$

〔例3〕 质点m作直线振动，恢复力与位移成比例，为了方便，设比例常数为$m\omega^2$。在时刻$t_k=k\tau$（$k=0$，1，2，…）时，该质点受到大小为a的冲力作用。设初位移与初速都为0，并设τ不是$\dfrac{2\pi}{\omega}$的整倍数，若不计阻尼，求该质点的运动方程$x=x(t)$。

解 由牛顿第二定律建立方程

$$mx''+m\omega^2x=a\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-k\tau),\quad x(0)=x'(0)=0$$

其中$\delta(t)$是单位脉冲函数。对方程两端取拉普拉斯变换

$$mp^2X(p)+m\omega^2X(p)=a\sum_{k=0}^{\infty}e^{-k\tau p}=\frac{a}{1-e^{-\tau p}}$$

解出$X(p)$

$$X(p)=\frac{a}{m}\frac{1}{(p^2+\omega^2)(1-e^{-\tau p})}$$

因τ不是$\tau_1=\frac{2\pi}{\omega}$的整倍数，那么$X(p)$的极点$p=0$，$p=\pm i\omega$，$p_n=\frac{2n\pi i}{\tau}$（其中$n=\pm 1, \pm 2, \cdots$）都是一阶的。我们利用公式（2.7.2）及罗比塔法则来计算留数。

$$\operatorname*{res}_{p=0}[e^{pt}X(p)]=\lim_{p\to 0} pe^{pt}X(p)=\frac{a}{m\omega^2}\lim_{p\to 0}\frac{p}{1-e^{-\tau p}}$$

$$=\frac{a}{m\omega^2}\lim_{p\to 0}\frac{1}{\tau e^{-\tau p}}=\frac{a}{m\omega^2\tau}$$

$$\operatorname*{res}_{p=i\omega}[e^{pt}X(p)]+\operatorname*{res}_{p=-i\omega}[e^{pt}X(p)]$$

$$=\lim_{p\to i\omega}(p-i\omega)e^{pt}X(p)+\lim_{p\to -i\omega}(p+i\omega)e^{pt}X(p)$$

$$=\frac{a}{2m\omega i}\left[\frac{e^{i\omega t}}{1-e^{-i\tau\omega}}-\frac{e^{-i\omega t}}{1-e^{i\tau\omega}}\right]$$

$$=\frac{a}{2m\omega i}\left[\frac{e^{i\omega t}\cdot e^{i\frac{\tau\omega}{2}}}{e^{i\frac{\tau\omega}{2}}-e^{-i\frac{\tau\omega}{2}}}-\frac{e^{-i\omega t}\cdot e^{-i\frac{\tau\omega}{2}}}{e^{-i\frac{\tau\omega}{2}}-e^{i\frac{\tau\omega}{2}}}\right]$$

$$=\frac{a}{2m\omega i}\left[\frac{e^{i\left(\omega t+\frac{\tau\omega}{2}\right)}+e^{-i\left(\omega t+\frac{\tau\omega}{2}\right)}}{e^{i\frac{\tau\omega}{2}}-e^{-i\frac{\tau\omega}{2}}}\right]$$

$$=-\frac{a}{2m\omega}\cdot\frac{\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)}{\sin\frac{\tau\omega}{2}}$$

$$\underset{p=p_k}{\text{res}}[e^{pt}X(p)]+\underset{p=-p_k}{\text{res}}[e^{pt}X(p)]$$

$$=\frac{a}{m(p_k^2+\omega^2)}\left[e^{p_kt}\cdot\lim_{p\to p_k}\frac{p-p_k}{1-e^{-\tau p}}\right.$$

$$\left.+e^{-p_kt}\cdot\lim_{p\to -p_k}\frac{p+p_k}{1-e^{-\tau p}}\right]=\frac{a}{m(p_k^2+\omega^2)}$$

$$\cdot\left[e^{p_kt}\cdot\frac{1}{\tau e^{-\tau p_k}}+e^{-p_kt}\cdot\frac{1}{\tau e^{\tau p_k}}\right]$$

其中 $\tau p_k=2k\pi i, e^{-\tau p_k}=e^{\tau p_k}=1, e^{p_kt}+e^{-p_kt}=e^{i\frac{2k\pi}{\tau}t}+e^{-i\frac{2k\pi}{\tau}t}$ $=2\cos\frac{2k\pi}{\tau}t=2\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t$，于是

$$\underset{p=p_k}{\text{res}}[e^{pt}X(p)]+\underset{p=-p_k}{\text{res}}[e^{pt}X(p)]=\frac{a}{m\tau(p_k^2+\omega^2)}$$

$$\cdot\ 2\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t=\frac{a}{m\omega^2}\cdot\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t$$

$$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

以上结果相加，便得

$$X(t)=\mathscr{L}^{-1}\{X(p)\}$$

$$=\frac{a}{m\omega^2}\left\{\frac{1}{\tau}-\frac{\omega}{2\sin\frac{\omega\tau}{2}}\cos\omega\left(t+\frac{\tau}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-k^2\tau_1^2}\cos k\frac{\tau_1}{\tau}\omega t\right\}^{●}$$

（四）像函数的极点分布与运动规律

本段讨论像函数为有理分式时，它的极点分布与它的像原函数之间的关系。

若像函数 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 为有理既约真分式（分母 $B(p)$

● 本题也能用第一章§1.2中例8所述的方法求像原函数。

的次数较分子为高)；设分母的单根为 p_1，p_2，…，重根为 z_1，z_2，…，重根的阶数分别为 N_1，N_2，…，$(N_i\geqslant 2)$，则由公式(2.7.6) 及求留数公式可得

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}+\sum_k \frac{1}{(N_k-1)!}\lim_{p\to z_k}\frac{d^{N_k-1}}{dp^{N_k-1}}\cdot\left[(p-z_k)^{N_k}\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right] \tag{2.7.7}$$

上面第一个和式是利用 (2.7.2) 式简化而来的，因为，用罗比塔法则，有

$$\operatorname*{res}_{p=p_k}\left[\frac{A(p)}{B(p)}e^{pt}\right]=\lim_{p\to p_k}\left[\frac{(p-p_k)A(p)e^{pt}}{B(p)}\right]$$

$$=\lim_{p\to p_k}\frac{A(p)e^{pt}+(p-p_k)[A(p)e^{pt}]'_p}{B'(p)}$$

$$=\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t}$$

而式 (2.7.7) 中的第二个和式，是由 (2.7.1) 式直接得来的。

今将有用的若干特殊情况分述如下：

假若分母 $B(p)$ 的根都是单根，则

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum_k \frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_k t} \tag{2.7.8}$$

再若 $A(p)$、$B(p)$ 都是实系数的，设 $p=s+i\sigma(\sigma\neq 0)$ 是 $B(p)$ 的一个单虚根，则 $\bar{p}=s-i\sigma$ 也是 $B(p)$ 的一个单虚根，且它的对应项是

$$\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})}e^{\bar{p}t}=\overline{\left\{\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}\right\}}$$

所以这一对共轭虚根 $s\pm i\sigma$ 在 (2.7.8) 式中对应项之和为

$$\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}+\frac{A(\bar{p})}{B'(\bar{p})}e^{\bar{p}t}=2\operatorname{Re}\left\{\frac{A(p)}{B'(p)}e^{pt}\right\}$$

于是（2.7.8）式变成实数形式

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A(p)}{B(p)}\right\}=\sum\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_kt}$$

$$+2\ \mathrm{Re}\left\{\sum\frac{A(p_k)}{B'(p_k)}e^{p_kt}\right\} \qquad (2.7.9)$$

其中第一个和式是对 $B(p)$ 的所有实根取的，第二个和式是对 $B(p)$ 的所有虚根取的（每一对共轭虚根只取其中之一）。

假如 $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 的像原函数 $f(t)$ 对应着质点作直线运动的运动规律的话，那么我们可对(2.7.9)式作些物理解释。在 $B(p)$ 的所有根中若有一个实部为正，则运动的振幅将随时间无限制的增大。若 $B(p)$ 的某个根的实部为负，则这个根在(2.7.9)式当中的对应项将随时间 t 无限衰减。若 $B(p)$ 的所有根的实部都不为正，我们设其中纯虚根为 $p_k=i\sigma_k$，则该运动的稳定状态便是

$$f(t)=2\mathrm{Re}\left\{\sum\frac{A(i\sigma_k)}{B'(i\sigma_k)}(\cos\sigma_kt+i\sin\sigma_kt)\right\} \qquad (2.7.10)$$

其中和式是对所有纯虚根 $i\sigma_k$ 取的（每一对共轭虚根只取其中之一），而 $B(p)$ 的实部为负的根的对应项都衰减掉了；这时，运动的稳态显然是简谐运动的叠加。

从这里我们可以看出，研究像函数 $\dfrac{A(p)}{B(p)}$ 的极点分布与运动规律 $f(t)$ 的密切关系。

* * * * * * *

〔附录〕 约当引理的证明

约当引理 设函数 $F(p)$ 在如图2-12的以充分大的任意 R 为半径的优圆弧 $\Gamma=\overset{\frown}{BDA}$ 上满足

$$|F(p)|<\frac{M}{R^k}$$

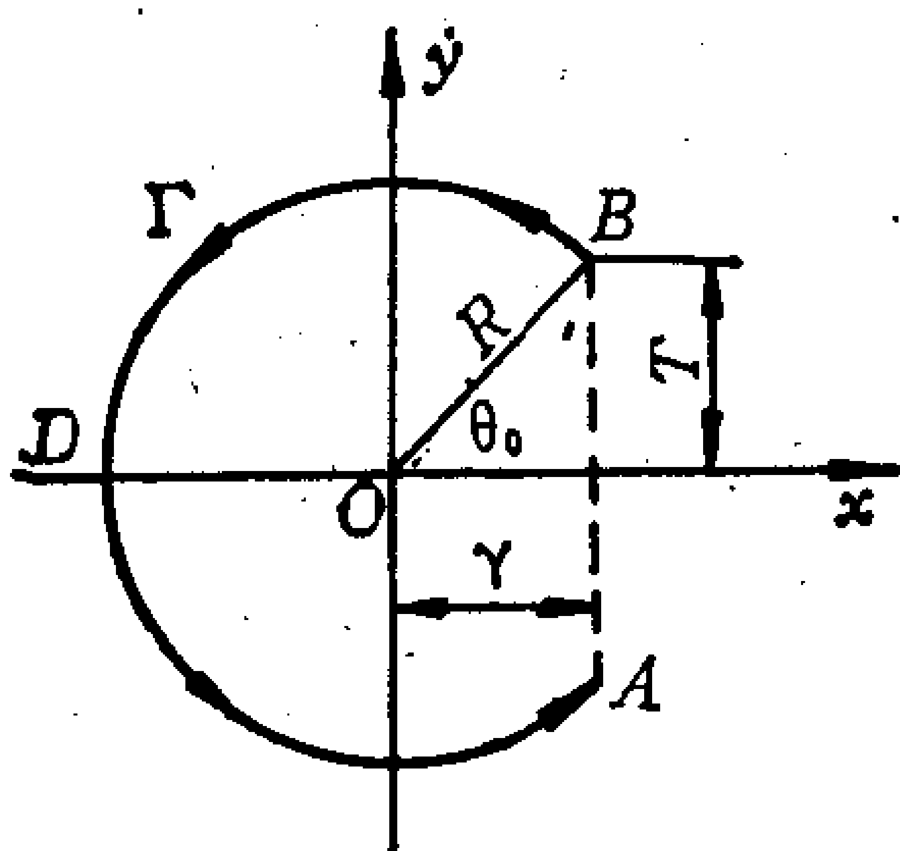


图 2-12

其中M、k为正常数，则

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma e^{pt}F(p)dp=0 \qquad (2.7.4)$$

其中 $t>0$，图中γ为定数。

证明 设θ_0角如图。在Γ上：$p=Re^{i\theta}(\theta_0\leqslant\theta\leqslant2\pi-\theta_0)$，$dp=iRe^{i\theta}d\theta$，$|e^{pt}|=e^{tR\cos\theta}$，$|dp|=Rd\theta$。于是在$\Gamma$上，

$$|e^{pt}F(p)dp|\leqslant e^{tR\cos\theta}\frac{M}{R^k}Rd\theta=\frac{M}{R^{k-1}}e^{tR\cos\theta}d\theta$$

从而

$$\left|\int_\Gamma e^{pt}F(p)dp\right|\leqslant\frac{M}{R^{k-1}}\int_{\theta_0}^{2\pi-\theta_0}e^{tR\cos\theta}d\theta$$

考虑到在$O\theta y$平面上（图2-13），曲线$y=\cos\theta$以直线$\theta=\pi$为对称轴，$e^{tR\cos\theta}$在（θ_0，$2\pi-\theta_0$）上的积分为在（θ_0，π）上积分的两倍，所以

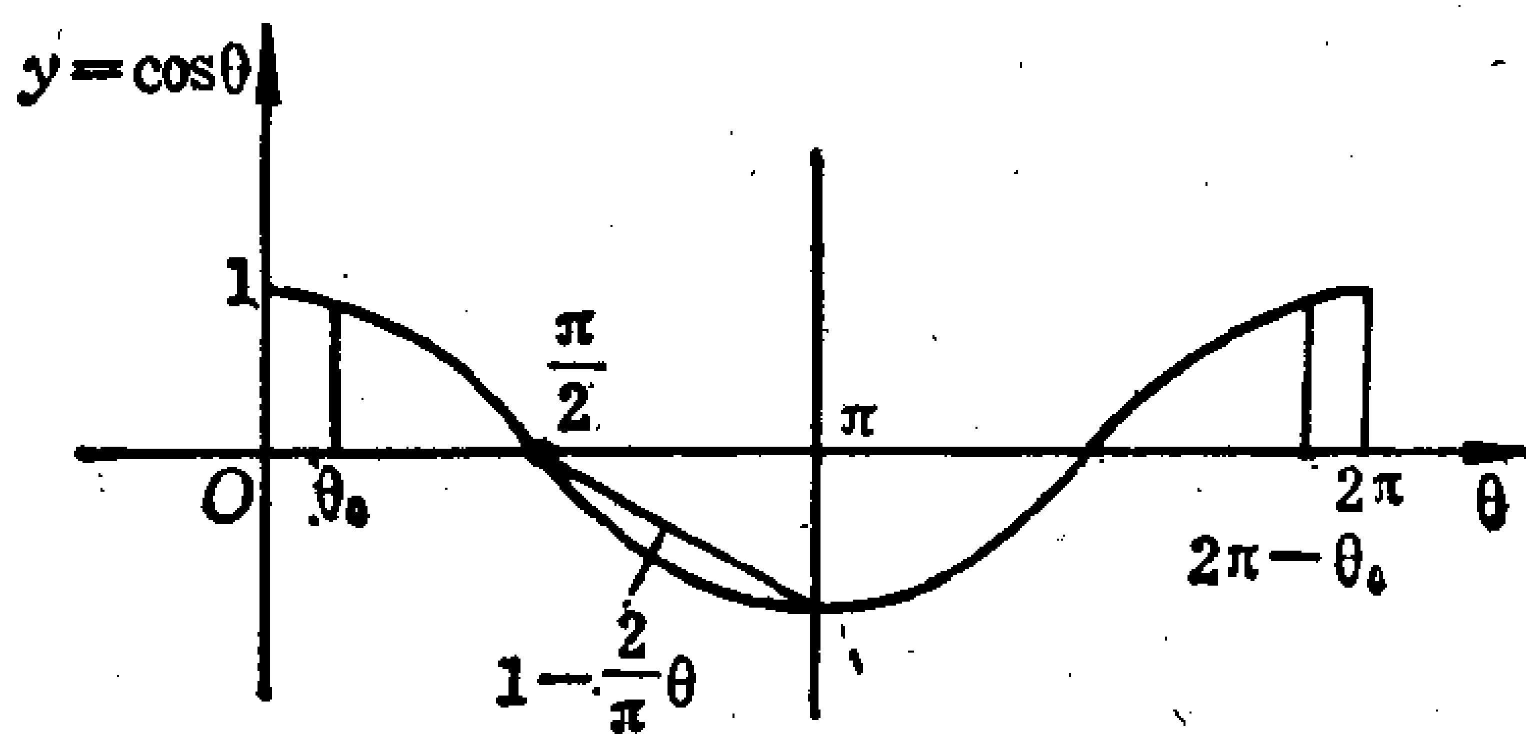


图 2-13

$$\left|\int_\Gamma e^{pt}F(p)dp\right|\leqslant\frac{2M}{R^{k-1}}\int_{\theta_0}^{\pi}e^{tR\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{2M}{R^{k-1}}\left(\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}e^{tR\cos\theta}d\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{tR\cos\theta}d\theta\right)\quad(2.7.11)$$

其中

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}e^{tR\cos\theta}d\theta\leqslant\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}e^{tR\cos\theta_0}d\theta=\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}}e^{\gamma t}d\theta$$

$$=e^{\gamma t}\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)=e^{\gamma t}\arcsin\frac{\gamma}{R}\qquad(2.7.12)$$

而当$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\pi$时，由图2-13知

$$\cos\theta\leqslant1-\frac{2}{\pi}\theta$$

故

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{tR\cos\theta}d\theta\leqslant\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{tR\left(1-\frac{2}{\pi}\theta\right)}d\theta$$

$$=e^{tR}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-\frac{2}{\pi}Rt\theta}d\theta=\frac{\pi}{2Rt}(1-e^{-Rt})\leqslant\frac{\pi}{2Rt}\qquad(2.7.13)$$

将（2.7.12）式与（2.7.13）式代入（2.7.11）式，得

$$\left|\int_\Gamma e^{pt}F(p)dp\right|\leqslant\frac{2M}{R^k}\left(e^{\gamma t}R\arcsin\frac{\gamma}{R}+\frac{\pi}{2t}\right)$$

注意到$R\to+\infty$时，$\arcsin\frac{\gamma}{R}\sim\frac{\gamma}{R}$，所以上式右端极限为0。这样便证明了（2.7.4）式。

习 题 二

1. 设$F(\alpha)$是函数$f(t)$的傅里叶变换，试证明：$F(\alpha)$与$f(t)$的奇偶性相同。

2. 设$F(\alpha)=\mathscr{F}\{f(t)\}$，$f(t)=f_1(t)+if_2(t)$，其中$f_1(t)$、$f_2(t)$都是实变量$t$的实函数，试证明

$$\begin{cases} R(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)\cos\alpha t+f_2(t)\sin\alpha t]dt \\ X(\alpha)=-\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(t)\sin\alpha t-f_2(t)\cos\alpha t]dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[R(\alpha)\cos\alpha t-X(\alpha)\sin\alpha t]d\alpha \\ f_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[R(\alpha)\sin\alpha t+X(\alpha)\cos\alpha t]d\alpha \end{cases}$$

其中$R(\alpha)$、$X(\alpha)$分别为$F(\alpha)$的实、虚部，即

$$F(\alpha)=R(\alpha)+iX(\alpha)$$

3. 试证明

（1）像原函数$f(t)$是实值函数的充要条件是它的像函数$F(\alpha)$满足

$$F(-\alpha)=\overline{F(\alpha)}$$

（2）像原函数$f(t)$是纯虚值函数的充要条件是它的像函数$F(\alpha)$满足

$$F(-\alpha)=-\overline{F(\alpha)}$$

4. 按定义求下列函数的傅里叶变换

（1）$e^{-b|t|}$，$b>0$　　（4）$u(t-\tau)$

（2）$u(t)\sin bt$　　（5）$u(t)t^2$

（3）$u(t)\cos bt$

其中（2）（3）（4）（5）题参看§2.6之（二）。

5. 已知

$$f(t)=\begin{cases} 1-t^2 & |t|<1 \\ 0 & |t|>1 \end{cases}$$

（1）求$f(t)$的傅里叶变换

（2）利用（1）的结果及反演公式计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}\cos\frac{x}{2}dx$$

6. 已知

$$f(x)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant x<1 \\ 0 & x\geqslant 1 \end{cases}$$

试求：（1）$f(x)$的傅里叶正弦变换；（2）$f(x)$的傅里叶余弦变换，并分别画出函数$f(x)$与它的变换的图形。

7. 已知$f(x)=e^{-x}(x\geqslant 0)$

（1）求函数$f(x)$的傅里叶正弦变换；

（2）用上面结果证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2}e^{-m},\ m>0$$

8. 设$f(x)$是实值函数，又设$\mathscr{F}\{f(t)\}=F(\alpha)$，$\mathscr{F}^{-1}\{f(\alpha)\}=\varphi(t)$，试证明函数$f(x)$的像函数$F(\alpha)$与像原函数$\varphi(t)$（此时又以$f(\alpha)$为像函数）之间有关系

$$F(\alpha)=2\pi\overline{\phi(\alpha)}$$

9. （1）求函数$f(t)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & |t|\leqslant\varepsilon\\ 0, & |t|>\varepsilon\end{cases}$的傅里叶变换；

（2）求这变换当$\varepsilon\to+0$时的极限

（注：当$\varepsilon\to+0$时，$f(t)$的极限被定义作单位脉冲函数$\delta(t)$，而(2)的结果被当作$\delta(t)$的傅里叶变换，即$\mathscr{F}\{\delta(t)\}=1$。关于$\delta(t)$，详见第一章中§1.6。

10. 利用性质（五）或性质（七），求下列函数的傅里叶变换：

（1）$u(t)\sin bt$

（2）$u(t)\cos bt$

（3）$u(t)t^n$，$n=2,3,\cdots$

（提示：要用到§2.6中证明的结果$\mathscr{F}\{u(t)\}=\dfrac{1}{i\alpha}$）

11. 证明卷积满足结合律与对加法的分配律。

12. 用$f_1(t)=f_2(t)=\begin{cases}1, & |t|<1\\ 0, & |t|>1\end{cases}$去验证卷积定理。

13. 试证明对应于傅里叶正弦变换与余弦变换的巴塞弗恒等式分别为：

$$\int_0^{+\infty}F_s(\alpha)G_s(\alpha)d\alpha=2\pi\int_0^{+\infty}f(t)g(t)dt$$

$$\int_0^{+\infty}F_c(\alpha)G_c(\alpha)d\alpha=2\pi\int_0^{+\infty}f(t)g(t)dt$$

14. 利用上述巴塞弗恒等式及§2.3例4，第4题（1）及第6题的结果，分别证明广义积分公式〔利用第4题（1）的结果时，注意(2.3.16)式$F(\alpha)=F_s(\alpha)$〕

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$

(3) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1-\cos x}{x}\right)^2 dx = \frac{\pi}{2}$

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

(5) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^4} dx = \frac{\pi}{32}$

15. 解积分方程

$$\int_0^{+\infty} y(x) \sin tx dx = f(t)$$

并将求出的解代回方程以验证其正确性。其中$f(t)$分别是

(1) $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant t < 1 \\ 2 & 1 \leqslant t < 2 \\ 0 & t \geqslant 2 \end{cases}$

(2) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cos t & 0 \leqslant t < \pi \\ -\frac{\pi}{4} & t = \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$

(3) $f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \sin t & 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$

16. 一根无限长棒的初始温度$f(x)$为已知，求其温度$u(x, t)$，即解定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u(x, 0) = f(x) \end{cases}$$

17. 解无界弦振动的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (-\infty < x < +\infty, \quad t > 0) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases}$$

其中，初始位移$\varphi(x)$与初始速度$\psi(x)$均为已知。

18. 用拉普拉斯变换的复反演公式及留数重新计算第一章第6题中的(10)～(14)。

补充选作题

1. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

的傅里叶变换。并计算

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

之值。

2. 设三角脉冲函数

$$f(t)=\begin{cases}0 & |t|>\beta\\ 1-\dfrac{|t|}{\beta} & |t|<\beta\end{cases}$$

(β为正常数)，求$f(t)$的傅里叶变换$F(\alpha)$。

3. 求函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<a\\ x & a<x<b\\ 0 & x>b\end{cases}$$

的傅里叶正弦变换。

4. 已知

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<b\\ \dfrac{1}{2} & x=b\\ 0 & x>b\end{cases}$$

(1) 求函数$f(x)$的傅里叶余弦变换。

(2) 用上面结果证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2}$$

5. 已知$f(t)$的傅里叶变换为

$$F(\alpha)=\begin{cases}1 & |\alpha|\leqslant\delta\\ 0 & |\alpha|>\delta\end{cases}$$

试求$f(t)$。

6．试将函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

表示成傅里叶积分。

7．求下列微分方程通解的统一表达形式

$$y'-y=f(x)$$

其中

$$f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$$

附　表

附表一　拉普拉斯变换法则公式

	像原函数	像函数
	$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}e^{pt}F(p)dp$	$F(p)=\int_{0}^{-\infty}f(t)e^{-pt}dt$
1	$cf_1(t)+bf_2(t)$	$cF_1(p)+bF_2(p)$
2	$f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
3	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
4	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)$ $-\cdots-f^{(n-1)}(0)$
5	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
6	$\int_0^t\int_0^\tau f(\lambda)d\lambda\, d\tau$ $=\int_0^t(t-\lambda)f(\lambda)d\tau$	$\frac{F(p)}{p^2}$
7	$\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau=f^{(-1)}(t)$❶	$\frac{F(p)}{p}+\frac{f^{(-1)}(0)}{p}$
8	$f(t\pm b)u(t\pm b)$	$e^{\pm bp}F(p)$　　$b\geqslant 0$
9	$f(bt)$	$\frac{1}{b}F\left(\frac{p}{b}\right)$
10	$e^{bt}f(t)$	$F(p-b)$
11	$\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)du$ $=f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(p)F_2(p)$

（续）

	像原函数	像函数
12	$\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} f(t, \alpha)$	$\lim\limits_{\alpha \to \alpha_0} F(p, \alpha)$
13	$\frac{\partial}{\partial \alpha} f(t, \alpha)$	$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(p, \alpha)$
14	$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(t, \alpha) d\alpha$	$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} F(p, \alpha) d\alpha$
15	$tf(t)$	$-F'(p)$
16	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
17	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{\infty} F(p) dp$
18	$\mathrm{Re}\, f(t)$	$\mathrm{Re} F(p)$
19	$\mathrm{Im}\, f(t)$	$\mathrm{Im} F(p)$
20	$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = \lim\limits_{p \to \infty} pF(p)$	
21	$\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = \lim\limits_{p \to 0} pF(p)$。$pF(p)$的奇点都在$\mathrm{Re}\,p < 0$	

❶ 这里不要求 $f(t) = 0$（当 $t > 0$ 时）。

附表二 拉普拉斯变换简表

	像原函数	像函数
	$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{pt} F(p) dp$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{p}$

(续)

	像原函数	像函数
3	t	$\frac{1}{p^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^n}$
5	$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$，$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$	$\frac{1}{p^\alpha}$
6	a^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(p+a)^2}$
8	$\frac{t^{n-1}e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
9	$\frac{t^{\alpha-1}e^{-bt}}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{1}{(p+b)^a}$
10	$\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
11	$\frac{(a-b)e^{-bt}-(a-c)e^{-ct}}{c-b}$	$\frac{p+a}{(p+b)(p+c)}$
12	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
13	$\cos\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
14	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$
15	$\cosh\omega t$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$
16	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
17	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
18	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$
19	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

(续)

	像原函数	像函数
20	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$
21	$\frac{1-\cos at}{a^2}$	$\frac{1}{p(p^2+a^2)}$
22	$\frac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$	$\frac{p}{(p^2+a^2)(p^2+b^2)}$
23	$\frac{1}{a^2}\sin\frac{at}{\sqrt{2}}\sinh\frac{at}{\sqrt{2}}$	$\frac{p}{p^4+a^4}$
24	$\cos\frac{at}{\sqrt{2}}\cosh\frac{at}{\sqrt{2}}$	$\frac{p^3}{p^4+a^4}$
25	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}$
26	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}$
27	$1+e^t\mathrm{erf}(\sqrt{t}-1)$	$\frac{1}{p(1+\sqrt{p})}$
28	$e^t[1-\mathrm{erf}(\sqrt{t})]$	$\frac{\sqrt{p}}{p(1+\sqrt{p})}$
29	$\delta(t-a)$	e^{-ap}
30	$u(t-a)$ $a\geqslant 0$	$\frac{e^{-ap}}{p}$
31	$1-\mathrm{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p}$
32	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
33	$J_0(2\sqrt{at})$	$\frac{e^{-a/p}}{p}$
34	$\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{at})$	$\frac{e^{-a/p}}{p^{n+1}}$

（续）

	像原函数	像函数
35	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{e^{-a/p}}{p\sqrt{p}}$
36	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{e^{-a/p}}{\sqrt{p}}$
37	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{t}$	$\ln\frac{p-b}{p-a}$

表中符号说明

1. $\delta(t)$单位脉冲函数。
2. $u(t)$单位阶跃函数。
3. $\Gamma(\alpha)$ 伽玛函数。

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

4. $J_0(t)$零阶贝塞尔函数。

$$J_0(t)=1-\frac{t^2}{2^2}+\frac{t^4}{2^4(2!)^2}-\cdots+(-1)^k\frac{t^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}+\cdots$$

5. $J_n(t)$ n阶贝塞尔函数。

$$J_n(t)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{t^{n+2m}}{2^{n+2m}m!\Gamma(n+m+1)}\qquad(n\geqslant 0)$$

6. $\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-x^2}dx$

$$1-\operatorname{erf}(t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_t^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

附表三 傅里叶变换法则公式

	像原函数	像函数
	$f(t)$	$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-i\alpha u}du$
1	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$	$F(\alpha)$
2	$cf_1(t)+bf_2(t)$	$cF_1(\alpha)+bF_2(\alpha)$
3	$f(bt)$	$\frac{1}{\lvert b\rvert}F\left(\frac{\alpha}{b}\right)$
4	$f(t-\tau)$	$e^{-i\alpha\tau}F(\alpha)$

(续)

	像原函数	像函数
5	$f'(t)$	$i\alpha F(\alpha)$
6	$f^{(n)}(t)$	$(i\alpha)^n F(\alpha)$
7	$\int_A^t f(u)du$	$\frac{1}{i\alpha}F(\alpha)$
8	$-itf(t)$	$F'(\alpha)$
9	$f(t)e^{ibt}$	$F(\alpha-b)$
10	$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(t-u)du$ $=f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\alpha)F_2(\alpha)$
11	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t)F_2(\alpha-t)dt$ $=\frac{1}{2\pi}F_1(\alpha)*F_2(\alpha)$

附表四　傅里叶变换简表

	像原函数	像函数
1	$\delta(t)$	1
2	$\delta(t-\tau)$	$e^{-i\alpha\tau}$
3	$u(t)$	$\frac{1}{i\alpha}$
4	$u(t-\tau)$	$\frac{1}{i\alpha}e^{-i\alpha\tau}$
5	$u(t)e^{-bt}$, $b>0$	$\frac{1}{b+i\alpha}$

（续）

	像原函数	像函数
6	$u(t-\tau)e^{-bt},\ b>0$	$\frac{e^{-b\tau}e^{-i\alpha\tau}}{b+i\alpha}$
7	$e^{-b\|t\|},\ b>0$	$\frac{2b}{b^2+\alpha^2}$
8	$u(t)t$	$-\frac{1}{\alpha^2}$
9	$u(t)\sin bt$	$\frac{b}{b^2-\alpha^2}$
10	$u(t)\cos bt$	$\frac{i\alpha}{b^2-\alpha^2}$
11	e^{-bt^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{b}}e^{-\frac{\alpha^2}{4b}}$
12	$u(t)t^n$	$\frac{\Gamma(n+1)}{(i\alpha)^{n+1}}$

习 题 答 案

习 题 一

1\. (1) $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

(2) $\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$

(3) $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$

(4) $\dfrac{1}{p}(3-4e^{-2p}+e^{-4p})$

(5) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{4e^{-3p}}{p}-\dfrac{e^{-3p}}{p^2}$

2\. (1) $\dfrac{72}{p^6}-\dfrac{3\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}+\dfrac{6}{p}$

(2) $\dfrac{10-3p}{p^2+4}$

(3) $\dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{p^{4/3}}+\dfrac{4}{p-2}$

(4) 不存在

(5) $\dfrac{1}{p^2+4}$

3\. (1) $5e^{-2t}$

(2) $4\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t$

(3) $2-5t$

(4) $\dfrac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}$

(5) $\frac{8t^{1/2}-5t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$

(6) $\frac{1}{2}(1-e^{-2t})$

(7) $\frac{1}{2}(1+e^{-2t})$

(8) $\frac{1}{b^2-a^2}(\cos at-\cos bt)$

(9) $-\frac{1}{6}+\frac{3}{10}e^{2t}-\frac{2}{15}e^{-3t}$

4. (1) $\frac{1}{p}(2e^{-p}+3e^{-2p})$

(2) $\frac{1}{p^2}e^{-3p}(3p+1)$

(3) $u(t-5)$

(4) $2u(t-1)-u(t-2)$

5. (1) $3u(t)+(\cos t-3)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$

$$=3u(t)-3u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)-u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$$

(2) $\frac{3(1-e^{-\pi p/2})}{p}-\frac{e^{-\pi p/2}}{p^2+1}$

6. (1) $\ln\frac{p-a}{p-b}$

(2) $\operatorname{arctg}\frac{a}{p}$

(3) $\frac{4p}{(p^2+4)^2}$

(4) $\frac{12p^2-16}{(p^2+4)^3}$

(5) $\frac{2\omega^3}{(p^2+\omega^2)^2}$

(6) $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$

(7) $\dfrac{2\omega p}{(p^2-\omega^2)^2}$

(8) $\dfrac{7e^{-8t}t^{-1/2}}{\sqrt{\pi}}$

(9) $t<5$ 时，0； $t>5$ 时，$\dfrac{2(t-5)^{-1/2}e^{2(t-5)}}{\sqrt{\pi}}$

(10) $1-e^{-at}-ate^{-at}$

(11) $e^t-e^{-t}\left(\cos 2t-\dfrac{3}{2}\sin 2t\right)$

(12) $1-e^{-t}+\dfrac{1}{2}t^2e^{-t}$

(13) $-\dfrac{1}{4}e^{-2t}+\dfrac{1}{4}e^{-2t}\cos 2t+\dfrac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$

(14) $\cos 2t+\sin 2t-e^{-t}-2te^{-t}$

(15) $\delta(t)+e^{-t}+3e^{-2t}-3e^{-4t}$

7. (1) $\dfrac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}$

(2) $\dfrac{1}{p^2+1}\operatorname{cth}\dfrac{\pi p}{2}$

(3) $\dfrac{h}{\tau p^2}\operatorname{th}\dfrac{p\tau}{2}$

8. (1) $\dfrac{1}{2}\sin t-\dfrac{t}{2}\cos t$

(2) e^t-1-t

11. (1) $A\cos kt+\dfrac{B}{k}\sin kt$

(2) $-\dfrac{1}{3}+\dfrac{8}{15}e^{3t}+\dfrac{4}{5}e^{-2t}$

(3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}e^t\cos 2t+\dfrac{1}{10}e^t\sin 2t$

(4) $\dfrac{1}{3}e^{-t}+4e^t-\dfrac{7}{3}e^{2t}$

(5) $\dfrac{2a}{\omega^2}\sin^2\dfrac{\omega t}{2}-\dfrac{a}{\omega^2}u(t-b)[1-\cos\omega(t-b)]$

(6) $2e^{-2t}\sin t$

(7) $\frac{1}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-t}(2t^2+2t+1)$

(8) $\left(1+\frac{5}{8}t\right)\cos t-\left(\frac{21}{8}-2t+\frac{1}{8}t^2\right)\sin t$

(9) $x=\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+a$, $y=-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{2}t+b$

(10) $x=3-2e^{-t}-e^{-2t}$, $y=2-4e^{-t}+2e^{-2t}$

(11) 特解：$x=-\frac{3}{2}e^{t}+2t$, $y=-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}$

通解：$x=2\sqrt{2}c_1e^{\sqrt{2}t}-2\sqrt{2}c_2e^{-\sqrt{2}t}$

$+c_3\sin t-c_4\cos t-\frac{3}{2}e^{t}+2t$

$y=c_1e^{\sqrt{2}t}+c_2e^{-\sqrt{2}t}+c_3\cos t+c_4\sin t$

$-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}$

13. $x=a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}t$

14. 当$\mu^2>4mc>0$时，$x=A_1e^{\frac{-\frac{\mu}{m}+\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)-\frac{4c}{m}}}{2}t}+A_2e^{\frac{-\frac{\mu}{m}-\sqrt{\left(\frac{\mu}{m}\right)^2-\frac{4c}{m}}}{2}t}$

当$\mu^2=4mc$时，$x=e^{-\frac{\mu}{2m}t}(A_1+A_2t)$

当$\mu^2<4mc$时，$x=e^{-\frac{\mu}{2m}t}\left[A_1\cos\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c}{m}-\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}t\right.$

$\left.+A_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4c}{m}-\left(\frac{\mu}{m}\right)^2}t\right]$

15. $\delta\left(t-nT+\frac{T}{2}\right)$或$-\delta(t-nT)$，$n=1, 2, \cdots$，其中

$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

16. （1） $y(t)=at$

（2） $\frac{ab}{\sqrt{b^2-bc}}\sin\sqrt{b^2-bc}\,t$

17. $\begin{cases} y(t)=\int_0^t f(t)dt-2\cos t * f(t) \\ z(t)=-\cos t * f(t) \end{cases}$

18. $$u(x, t)=v_0\left\{-t+\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left[\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)\times u\left(t-\frac{2kl+x}{a}\right)+\left(t-\frac{\overline{2k+1}\,l-x}{a}\right)\times u\left(t-\frac{\overline{2k+1}\,l-x}{a}\right)\right]\right\}$$

补充选作题

1. $y(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{G(p)+by(0)}{bp-R(p)+a}\right\}$，其中$G(p)=\mathscr{L}\{g(t)\}$，$R(p)=\mathscr{L}\{r(t)\}$

2. （1） $\frac{p+k}{(p+k)^2-a^2}$　　（2） $\frac{2ap}{(p^2-a^2)^2}$

（3） $\frac{2b(p+a)}{[(p+a)^2+b^2]^2}$　　（4） $\frac{e^{-bp}}{p}\left(b-a+\frac{1}{p}\right)$

3. $\frac{1}{p^2}\operatorname{cth}\frac{p}{2}-\frac{2}{p^3}$

4. （1） 由定义及积分变量代换

（2） 由$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{p}}$，$\mathscr{L}\{e^t\}=\frac{1}{p-1}$及卷积定理得$\frac{1}{\sqrt{p}(p-1)}=\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*e^t\right\}$，再求证其中卷积即 $e^t\cdot\operatorname{erf}(\sqrt{t})$

（3） 将已知分式$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$分为两个式子：

$$\frac{1}{p-1}-\frac{1}{\sqrt{p}(p-1)}$$

5. （1） $a=b=0$时，$\frac{t^2}{2}$，$a=b\neq 0$时，$\frac{1}{a^2}(1-ate^{-at}-e^{-at})$，

$a \neq 0$，$a \neq b \neq 0$ 时，$\frac{1}{ab}+\frac{e^{-at}}{a(a-b)}+\frac{e^{-bt}}{b(b-a)}$；……

（2） $e^{-t}-1+2\,\mathrm{sh}\frac{t}{2}$

（3） $\frac{1}{13}\left(7e^{\frac{t}{2}}-7e^{-t}\cos t-4e^{-t}\sin t\right)$

（4） $\frac{1}{a^2}\left(t-\frac{\sin at}{a}\right)$

（5） $5+2t+(3t-5)e^t$

6. $e^{-2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)+e^{-2t}\sin t * f(t)$

7. 先设$x'(0)=x_1$，求出解；再由条件$x\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$确定解中$x_1$。$x(t)=$ $\sin t-\frac{10}{3}\sin 2t$

8. 用到时间迟缓定理。$2e^{-2t}-e^{-t}-2u(t-2)(e^{-t+2}-e^{-2t+4})+2u(t-1)$ $\times(e^{-t+1}-e^{-2t+2})$

9. $Ct^n+\frac{t}{n-1}$

10. $\frac{1}{\omega^2}u(t-\tau_0)[1-\cos\omega(t-\tau_0)]$

习 题 二

4. （1）$2b/(b^2+\alpha^2)$

（2）$b/(b^2-\alpha^2)$

（3）$i\alpha/(b^2-\alpha^2)$

（4）$e^{-i\alpha\tau}/i\alpha$

（5）$2i/\alpha^3$

5. （1） $4(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)/\alpha^3$

（2） $-3\pi/16$，在反演公式中令$t=\frac{1}{2}$

6. （1） $2(1-\cos\alpha)/\alpha$

（2） $2\sin\alpha/\alpha$

7. （1）$2\alpha/(1+\alpha^2)$

（2）利用反演公式

9. （1）$(1-e^{-i\alpha\varepsilon})/i\varepsilon\alpha$



(1) $b/(b^2-\alpha^2)$

(2) $i\alpha/(b^2-\alpha^2)$

(3) $n!/(i\alpha)^{n+1}$

12. $$f_1 * f_2 = \begin{cases} 0 & t \leqslant -2 \\ 2+t & -2 < t \leqslant 0 \\ 2-t & 0 < t < 2 \\ 0 & t \geqslant 2 \end{cases}$$

$$\mathscr{F}\{f_1 * f_2\} = \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

15. (1) $2(1+\cos x-2\cos 2x)/\pi x$

(2) $x(1+\cos\pi x)/(x^2-1)$

(3) $\sin\pi x/(1-x^2)$

16. $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} f(x) * e^{-x^2/4a^2t}$

17. $\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(u)du$

18. 答案同第一章第6题中的(10)～(14)

补充选作题

1. $2\frac{1-\cos\alpha}{\alpha^2}=4\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\alpha^2}$，由傅里叶余弦逆变换公式，令 $t=0$；$\frac{\pi}{2}$

2. $\frac{4}{\alpha^2\beta}\left(\sin\frac{\alpha\beta}{2}\right)^2$

3. $2\left(\frac{a\cos a\alpha-b\cos b\alpha}{\alpha}+\frac{\sin b\alpha-\sin a\alpha}{\alpha^2}\right)$

4. (1) $\frac{2\sin b\alpha}{\alpha}$.　(2) 利用反演公式

5. $\frac{\sin\delta t}{\pi t}$

6. $\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha\cos\alpha x}{\alpha}d\alpha$　$(|x|\neq 1)$。当 $|x|=1$ 时，上述积分等于 $\frac{1}{2}$

7. $y(x)=Ce^x+Y(x)$

$$Y(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha(\alpha\sin\alpha x+\cos\alpha x-1)}{\alpha(1+\alpha^2)}d\alpha$$

[ＧｅｎｅｒａｌＩｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名＝拉普拉斯变换与傅里叶变换
作者＝周肇锡编
页数＝１６１
ＳＳ号＝１０１９２５４９
出版日期＝